

Математические и логические основы компьютера



20.12.2021

Оглавление

- Логическая информация и основы логики
- Логические операции
- Таблицы истинности сложных высказываний
- Логические схемы



Логическая информация и ОСНОВЫ ЛОГИКИ



Логика

«LOGOS» – слово, мысль,
понятие, рассуждение, закон

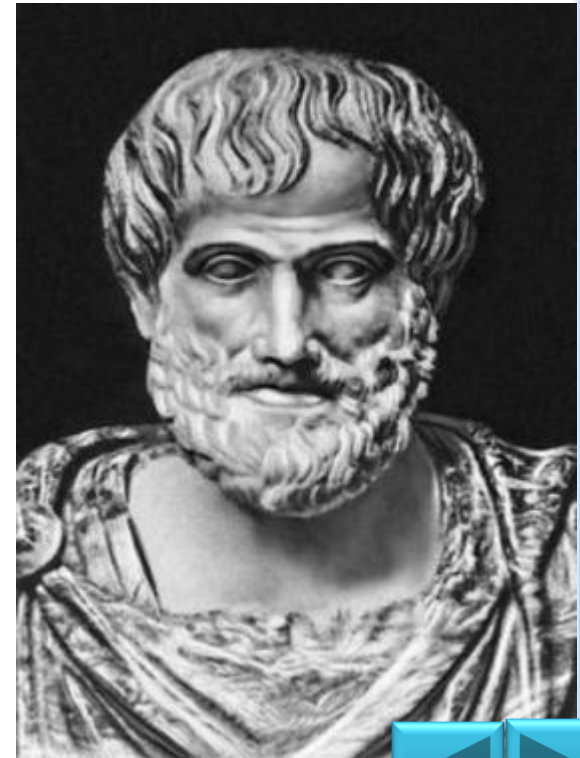
ЛОГИКА – наука о формах
мышления, учение о способах
рассуждений и доказательств



Логика как наука

Первые учения о способах и формах мышления, рассуждений и доказательств зародились на Древнем Востоке (Индия и Китай).

Основоположник современной формальной логики – Аристотель, т.к. он впервые отделил форму мышления от его содержания.



Логика как наука

**Готфрид Вильгельм
Лейбниц:**

**«Рассуждения могут
быть сведены к
механическому
выполнению
определенных
действий
по установленным
правилам»**



Готфрид Вильгельм фон Лейбниц
(1646-1716),



Задача логики

Описать и исследовать те способы рассуждений, которые являются правильными.



Формы мышления

Мышление осуществляется через понятия, высказывания (суждения) и умозаключения.



Понятие

Мысль, в которой обобщаются и выделяются предметы некоторого класса по определенным общим и в совокупности специфическим для них признакам.



Примеры:

«Студент - лицо, прослушивающее курс лекций».

«Преподаватель - лицо, которое читает лекции».



Высказывание

**Всякое утверждение
(предложение), о котором
можно судить, истинно оно или
ложно.**



Пример:

«Все вписанные углы, опирающиеся на диаметр – прямые».

«Москва – столица России».

«Луна есть спутник Марса».



Виды высказываний

- Общие (начинаются со слов **все, всякий, каждый, ни один**)
- Частные (начинаются со слов **некоторые, большинство**)
- Единичные (все остальные)



Примеры:

«Все рыбы умеют плавать».

«Некоторые медведи – бурые».

«Буква А – гласная»

«Некоторые ученики двоечники».

«Мой кот страшный забияка».

«Все солдаты храбрые».



СВОЙСТВО ВЫСКАЗЫВАНИЯ:

Если связь понятий, на которых построено высказывание, правильно отражают свойства и отношения реальных вещей, то такое высказывание **ИСТИННО**

Высказывание, противоречащее реальной действительности – **ложное**

ИСТИНА
ЛОЖЬ

ЛОГИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Или

ЛОГИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ



- Алгебра логики – это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности и ложности) и логических операций над ними



Пример:

«Буква «А» – гласная»

«Высота гор на Земле превосходит 15 км»

«Число Ү кратно 3»

« $4+5=10$ »





Предикат:

Выражения о переменных
(объектах) называют **предикатами**



Квантор:

Предикаты становятся высказываниями, если переменной придать некоторое числовое значение или применить логическую операцию, которая устанавливает область истинности (ее называют **квантор**)

$$\forall X$$
$$\exists X$$


Простые высказывания:

Высказывание считается **простым**, если никакая его часть не является высказыванием.



Сложные высказывания:

Сложные высказывания характеризуются тем, что образованы из нескольких высказываний с помощью определенных способов соединения высказываний.



Пример:

«Париж – столица Китая»

«Лондон или Париж не являются столицей Китая»

««Шахтер» выиграл встречу у «Динамо», а встреча с «Рубином» и «Спартак» закончилась вничью»



Умозаключение:

Умозаключение — это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких высказываний может быть получено новое суждение.



Пример:

Дано высказывание:

**«Все углы равнобедренного
треугольника равны»**

Получить высказывание

**«Этот треугольник –
равносторонний»**

путем умозаключений



Решение:

1. Если все углы равны, то в качестве основания можно выбрать любую сторону
2. Пусть основание – сторона **c**
3. Тогда **a = b**
4. Пусть основание – сторона **a**
5. Тогда **b = c**
6. Следовательно **a = b = c**. Треугольник равносторонний



Логические операции



Последовательность выполнения логических операций:

Конъюнкция

Дизъюнкция

Инверсия

Импликация

Эквивалентность



ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ:

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**Конъюнкция –
логическое
умножение**

«И»

AND

Конъюнкцией двух высказываний A и B называется новое высказывание A&B, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба исходных (простых) высказывания.



Пример:

A=«Сегодня солнечный день»

B=«Миша пошел купаться»

**X= A&B=«Сегодня солнечный день,
и Миша пошел купаться»**



ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Дизъюнкция –
логическое
сложение

«ИЛИ»

OR

Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется новое высказывание $A \vee B$, которое ложно тогда и только тогда, когда оба исходных (простых) высказывания ложны.



Пример:

A=«Снег пойдет ночью»

B=«Снег пойдет утром»

X=AVB=«Снег пойдет ночью или утром»



ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ:

A	\bar{A}
0	1
1	0

**Отрицание, или
инверсия**
«НЕ», «НЕВЕРНО, ЧТО»
NOT

Отрицанием, или инверсией
высказывания A называется новое
высказывание \bar{A} , которое истинно тогда,
когда A – ложно, и ложно тогда, когда A
– истинно.



Пример:

A=«Мы любим информатику»

A=«Мы не любим информатику»



ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

**Импликация –
логическое
следование**

«ЕСЛИ... , ТО...»

Импликация – связывает два простых логических высказывания, из которых первое (A) является условием, а второе (B) – следствием. Результатом импликации является ЛОЖЬ тогда и только тогда, когда условие (A) истинно, а следствие (B) ложно.



Пример:

A=«Треугольник равносторонний»

B=«Треугольник равноугольный»

**$X=A \Rightarrow B$ «Если треугольник
равносторонний, то он
равноугольный»**



ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**Эквивалентность –
равнозначность**

Эквивалентность -- операция сравнения двух логических высказываний A и B, результатом которой является новое логическое высказывание $A \Leftrightarrow B$, которое истинно тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или ложны.



Если формула содержит n элементарных высказываний, то она принимает 2^n значений, состоящих из нулей и единиц, или, что то же самое, таблица содержит 2^n строк.

Пример 1. Определить, какие из следующих предложений являются высказываниями:

а) Студенты университета.

б) $2 + 5 = 8$.

в) Сегодня плохая погода.

г) Всякий человек имеет сестру.

д) Для всех действительных чисел x и y верно равенство $xy = yx$.

е) Треугольник ЛВС равен треугольнику $L*V*C*$.

Решение:

а) Предложение не является высказыванием, так как оно ничего не утверждает о студентах.

б) Предложение является высказыванием, так как мы можем сказать, что оно ложно.

в) Предложение не является высказыванием, так как мы не можем определить, истинно оно или ложно, потому что не знаем, где и когда это должно произойти.

г) Предложение является высказыванием, так как оно принимает ложное значение,

д) Предложение является высказыванием, так как оно принимает истинное значение.

е) Предложение не является высказыванием, так как мы не можем определить, истинно оно или ложно, потому что не знаем, о каких именно треугольниках идет речь.

Пример 2. Определить значение истинности высказываний:

а) 7 является простым числом, или 19 является простым числом.

б) $2 + 3 = 6$, и Архангельск расположен на Северной Двине.

в) Если 12 делится на 6, то 12 делится на 4.

г) 11 делится на 3 тогда и только тогда, когда 20 делится на 5.

Решение:

а) Данное высказывание является сложным, поэтому обозначим X - 7 является простым числом, а Y - 19 является простым числом. Имеем, что $X = 1$, $Y = 1$. Составим формулу $X \vee Y$ и используя таблицу истинности, найдем логическое значение формулы. Получим $X \vee Y = 1$.

б) Данное высказывание является сложным, поэтому обозначим $X - 2 + 3 = 6$, а $Y -$ Архангельск расположен на Северной Двине. Имеем, что $X = 0$, $Y = 1$. Составим формулу $X \wedge Y$ и, используя таблицу истинности, найдем логическое значение формулы. Получим $X \wedge Y = 0$.

в) Данное высказывание является сложным, поэтому обозначим $X - 12$ делится на 6, а $K - 12$ делится на 4. Имеем, что $X = 1$, $Y = 1$. Составим формулу $X \rightarrow Y$ и, используя таблицу истинности, найдем логическое значение формулы. Получим $X \rightarrow Y = 1$.

г) Данное высказывание является сложным, поэтому обозначим $X - 11$ делится на 3, а $Y - 20$ делится на 5. Имеем, что $X = 0$, $Y = 1$. Составим формулу $X \leftrightarrow Y$ и, используя таблицу истинности, найдем логическое значение формулы. Получим $X \leftrightarrow Y = 0$.

Таблицы истинности сложных высказываний



Последовательность выполнения логических операций:

1. Действия в скобках
2. Инверсия
3. Конъюнкция
4. Дизъюнкция
5. Импликация и эквивалентность



Правила составления таблиц

ИСТИННОСТИ:

1. Определить количество строк и столбцов в таблице истинности.

Количество **строк** в таблице = 2^n + строка на заголовок.

Количество **столбцов** в таблице = сумме количества простых высказываний (n) и количества разных логических операций, входящих в сложное высказывание.

2. Начертить таблицу и заполнить заголовок.

3. Заполнить первые n столбцов.

4. Заполнить остальные столбцы.



Пример 1:

$(A \& B \vee C) \vee (\bar{A} \& \bar{C})$

Количество *строк* = $2^3 + 1 = 9$
 Количество *столбцов* = $3 + 6 = 9$

A	B	C	\bar{A}	\bar{C}	A&B	A&B∨C	\bar{A} & \bar{C}	$(A \& B \vee C) \vee (\bar{A} \& \bar{C})$
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1



Пример :

Записать в виде логического выражения следующее высказывание: «Летом Петя поедет в деревню и он пойдет на рыбалку или в лес за грибами».

1. Разобьем составное высказывание на простые высказывания и обозначим их через логические переменные:

A = Летом Петя поедет в деревню;

B = Он пойдет на рыбалку;

C = Он пойдет в лес за грибами.

2. Запишем высказывание в виде логического выражения, учитывая порядок действий. Если необходимо, расставим скобки:

$$F = A \& (B \vee C).$$

3. Составим таблицу истинности



Составить таблицу истинности:

¹
A & (²**B** ∨ ³**C**)

₁ ₂

Количество *строк* = $2^3 + 1 = 9$

Количество *столбцов* = $3 + 2 = 5$

A	B	C	B ∨ C	A & (B ∨ C)
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1



Задачник

Задачник

Задачник



Логические схемы



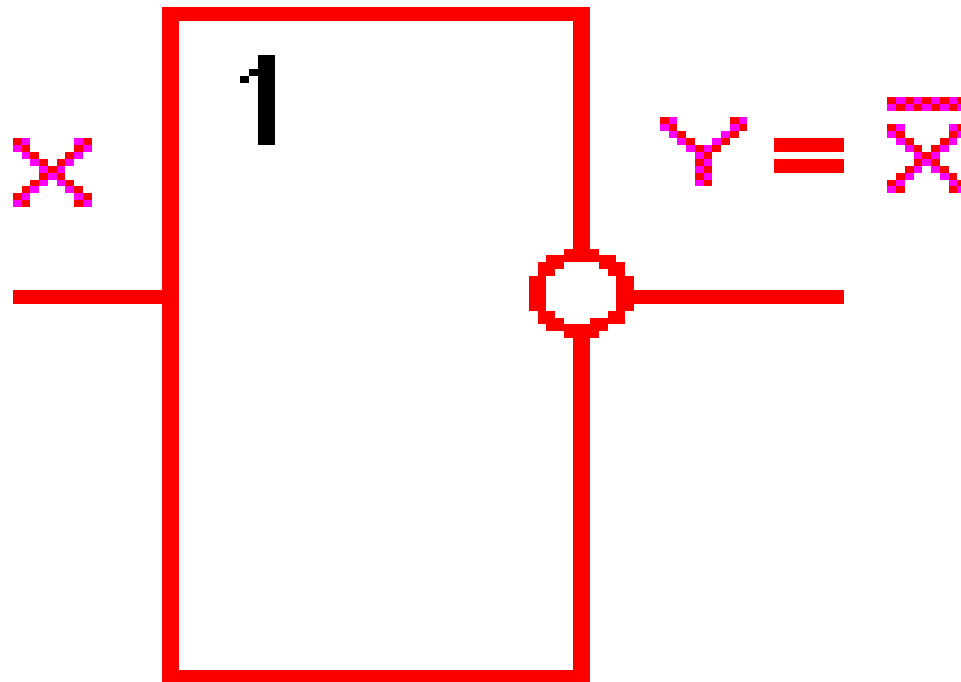
Определения:

Физическое устройство, реализующее одну из операций алгебры логики или простейшую логическую функцию, называется **ЛОГИЧЕСКИМ ЭЛЕМЕНТОМ**.

Схема, составленная из конечного числа логических элементов по определенным правилам, называется **ЛОГИЧЕСКОЙ СХЕМОЙ**.

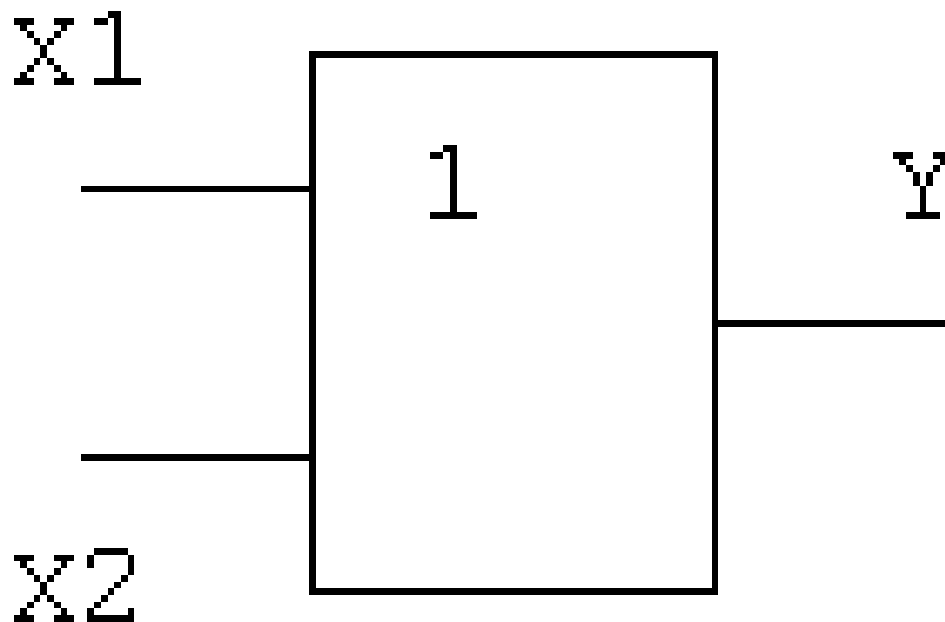


Логический элемент НЕ



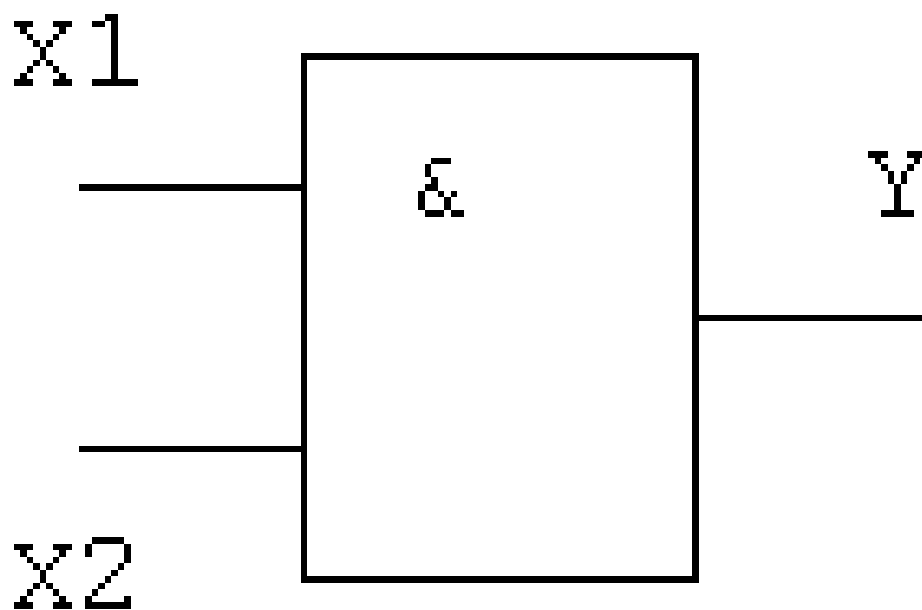
Логический элемент ИЛИ

$$Y = X_1 \vee X_2$$



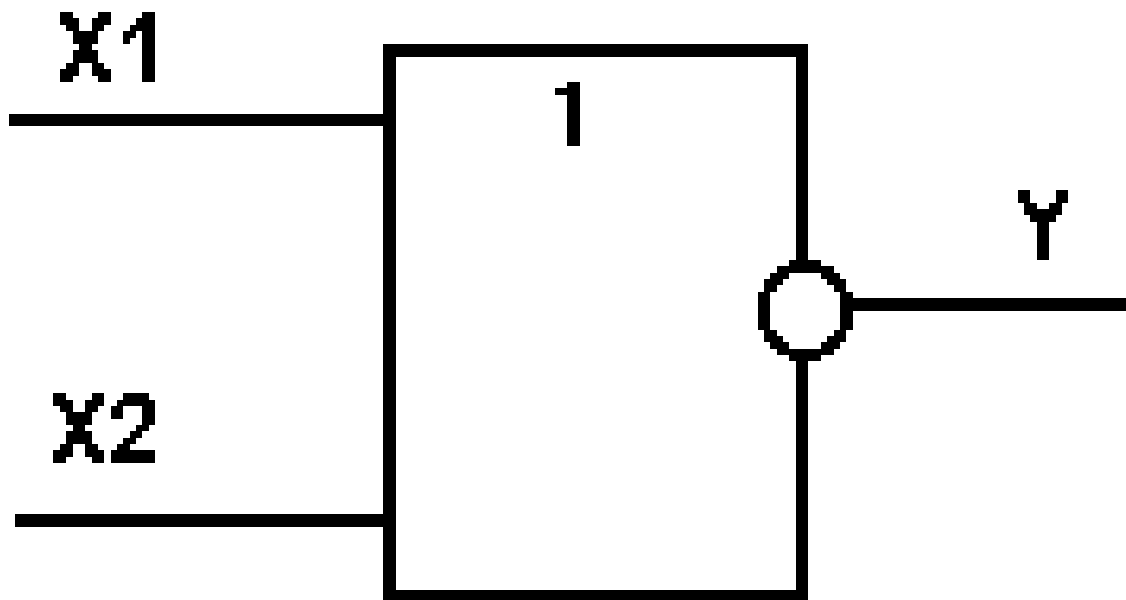
Логический элемент И

$$Y = X_1 \& X_2$$



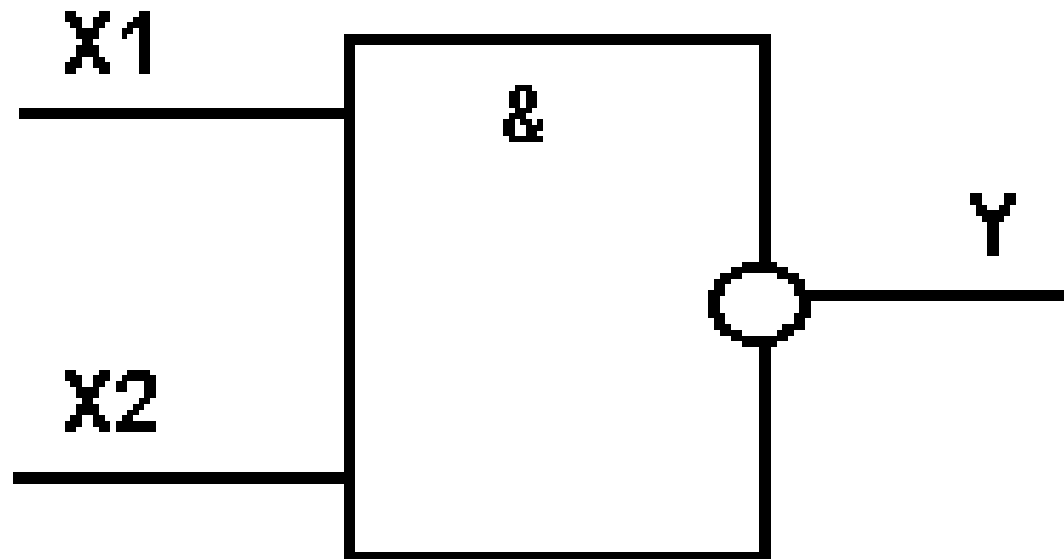
Логический элемент ИЛИ-НЕ

$$Y = \overline{X_1 \vee X_2}$$



Функция штрих Шеффера (логический элемент И-НЕ):

$$Y = \overline{X_1 \& X_2}$$



Список используемых источников:

- 1. Информатика и информационные технологии. Учебник для 10-11 классов/ Н.Д.Угринович. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006г.**
- 2. Информатика. Задачник-практикум в 2т./ Под ред. И.Г.Семакина, Е.К.Хеннера: Том 1. – М.: Лаборатория Базовых знаний, 2011**
- 3. <http://img01.chitalnya.ru/upload2/735/3697954593226313.jpg> - Аристотель**
- 4. http://infdeyatchel.narod.ru/_private/istory/portret/leibnic.jpg - Лейбниц**

