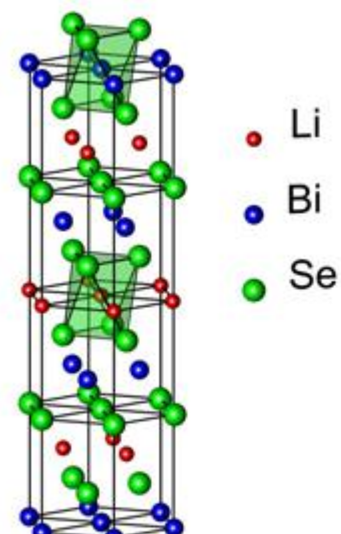
Модели
и моделирование

Модели и их типы

Модели в нашей жизни

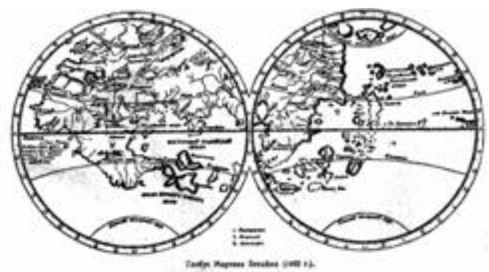


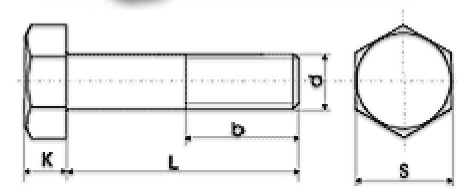
Что такое модель?

Модель – это объект, который обладает некоторыми свойствами другого объекта (*оригинала*) и используется вместо него.

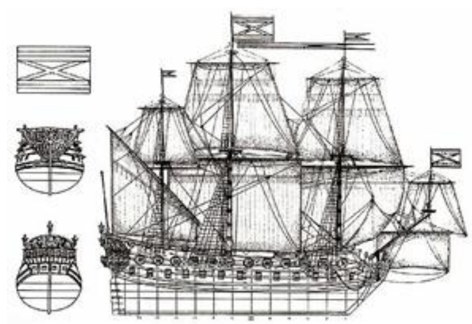
Оригиналы и модели











Первый линейный русский корабль «Гото Предестинация»


Что можно моделировать?

Модели объектов:

- уменьшенные копии зданий, кораблей, самолетов, …
- модели ядра атома, кристаллических решеток
- чертежи
- …

Модели процессов:

- изменение экологической обстановки
- экономические модели
- исторические модели
- …

Модели явлений:

- землетрясение
- солнечное затмение
- цунами
- …

Моделирование

Моделирование – это создание и использование моделей для изучения оригиналов.

Когда используют моделирование:

- **оригинал не существует**
  - древний Египет
  - последствия ядерной войны (Н.Н. Моисеев, 1966)
- **исследование оригинала опасно для жизни или дорого:**
  - управление ядерным реактором (Чернобыль, 1986)
  - испытание нового скафандра для космонавтов
  - разработка нового самолета или корабля
- **оригинал сложно исследовать непосредственно:**
  - Солнечная система, галактика (большие размеры)
  - атом, нейтрон (маленькие размеры)
  - процессы в двигателе внутреннего сгорания (очень быстрые)
  - геологические явления (очень медленные)
- **интересуют только некоторые свойства оригинала**
  - проверка краски для фюзеляжа самолета

Цели моделирования

- **исследование оригинала**

  изучение сущности объекта или явления

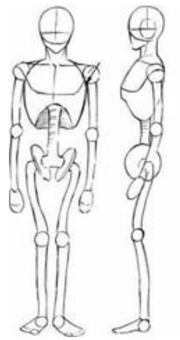
  «Наука есть удовлетворение собственного любопытства за казенный счет» (Л.А. Арцимович)
- **анализ («что будет, если …»)**

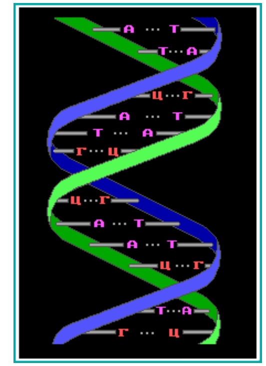
  научиться прогнозировать последствия различных воздействиях на оригинал
- **синтез («как сделать, чтобы …»)**

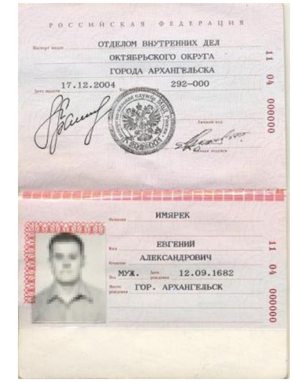
  научиться управлять оригиналом, оказывая на него воздействия
- **оптимизация («как сделать лучше»)**

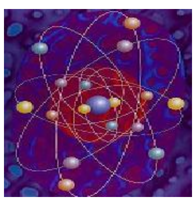
  выбор наилучшего решения в заданных условиях

Один оригинал – одна модель?







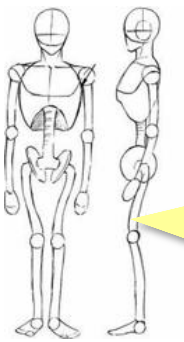


- материальная точка

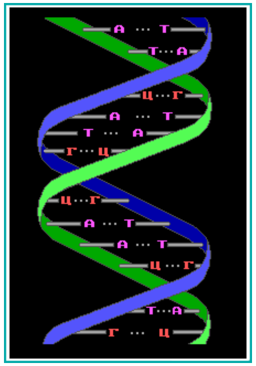
Оригиналу может соответствовать несколько разных моделей и наоборот!

Зачем нужно много моделей?

Тип модели определяется целями моделирования!



изучение строения тела



изучение наследственности

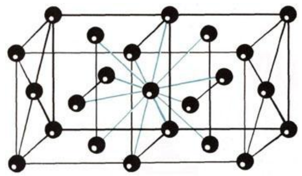
учет граждан страны

примерка одежды

тренировка спасателей

Природа моделей

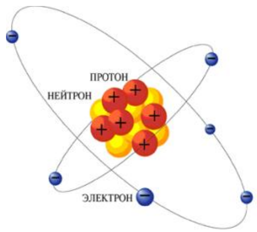
- **материальные (физические, предметные) модели:**

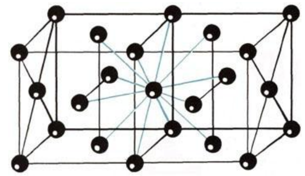
    

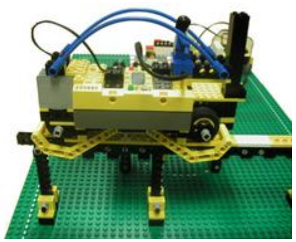
- **информационные модели** представляют собой информацию о свойствах и состоянии объекта, процесса, явления, и его взаимосвязи с внешним миром:
  - **вербальные** – словесные или мысленные
  - **знаковые** – выраженные с помощью формального языка
    - **графические** (рисунки, схемы, карты, …)
    - **табличные**
    - **математические** (формулы)
    - **логические** (различные варианты выбора действий на основе анализа условий)
    - **специальные** (ноты, химические формулы)

Модели по области применения

- **учебные** (в т.ч. тренажеры)







- **опытные** – при создании новых технических средств

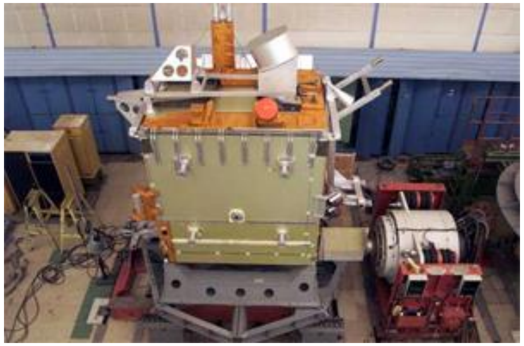
аэродинамическая труба

испытания в опытовом бассейне

- **научно-технические**

имитатор солнечного излучения

вакуумная камера в Институте космических исследований



вибростенд НПО «Энергия»

Модели по фактору времени

- **статические** – описывают оригинал в заданный момент времени
  - силы, действующие на тело в состоянии покоя
  - результаты осмотра врача
  - фотография
- **динамические**
  - модель движения тела
  - явления природы (молния, землетрясение, цунами)
  - история болезни
  - видеозапись события

Модели по характеру связей

- **детерминированные**
  - связи между входными и выходными величинами жестко заданы
  - при одинаковых входных данных каждый раз получаются одинаковые результаты

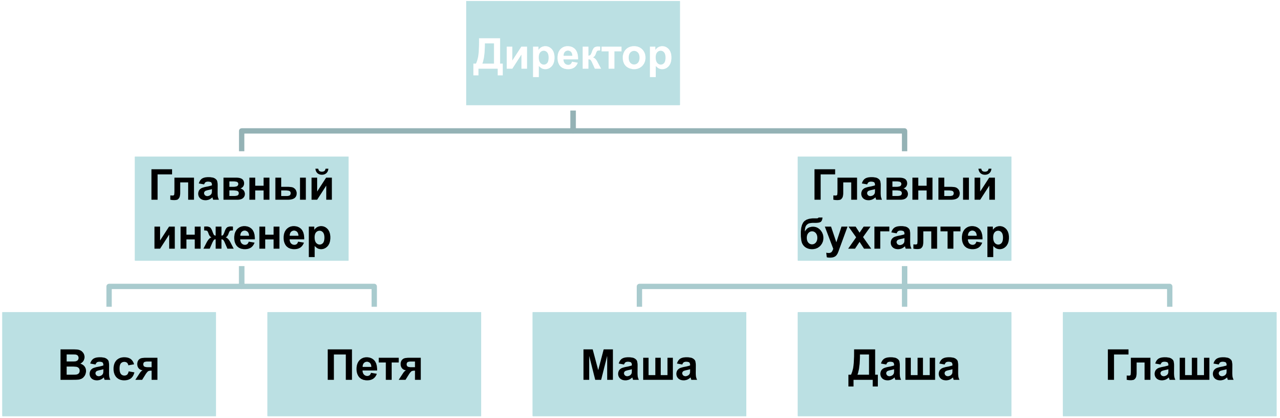
  Примеры
    - движение тела без учета ветра
    - расчеты по известным формулам

- **вероятностные (стохастические)**
  - учитывают случайность событий в реальном мире
  - при одинаковых входных данных каждый раз получаются немного разные результаты

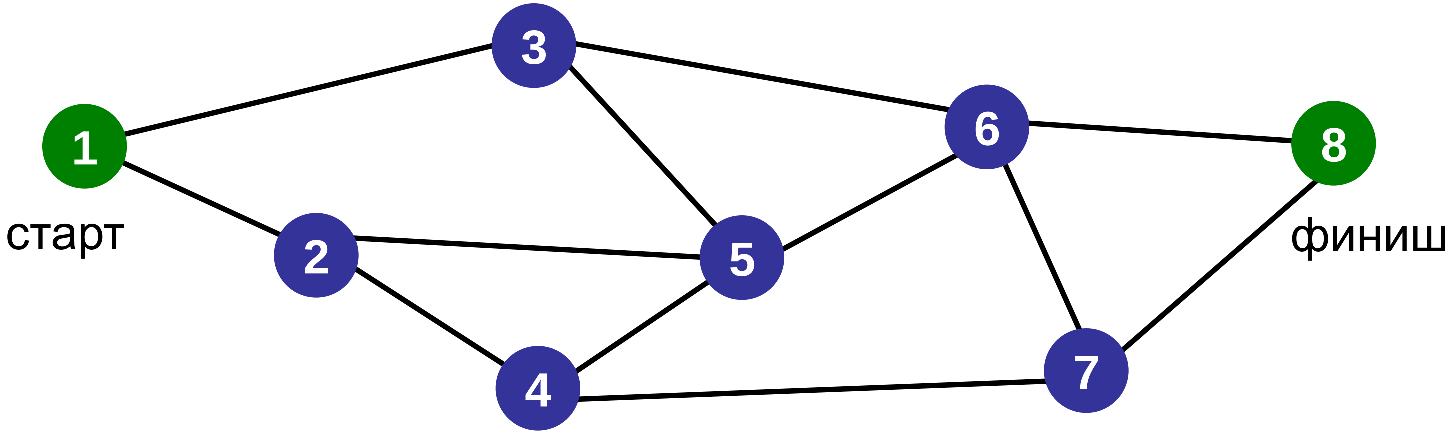
  Примеры
    - движение тела с учетом ветра
    - броуновское движение частиц
    - модель движения судна на волнении
    - модели поведения человека

Модели по структуре

- табличные модели (пары соответствия)
- иерархические (многоуровневые) модели



- сетевые модели (графы)



Специальные виды моделей

- **имитационные**
  - нельзя заранее вычислить или предсказать поведение системы, но можно имитировать её реакцию на внешние воздействия;
  - максимальный учет всех факторов;
  - только численные результаты;

! Задача – найти лучшее решение **методом проб и ошибок** (многократные эксперименты)!

Примеры:

- испытания лекарств на мышах, обезьянах, …
- математическое моделирование биологических систем
- модели бизнеса и управления
- модели процесса обучения

Специальные виды моделей

- **игровые** – учитывающие действия противника

Примеры:

- модели экономических ситуаций
- модели военных действий
- спортивные игры
- тренинги персонала

Задача – найти **лучший вариант действий в самом худшем случае!**

Адекватность модели

Адекватность – совпадение существенных свойств модели и оригинала:

- результаты моделирования согласуются с выводами **теории** (законы сохранения и т.п.)
- … подтверждаются **экспериментом**

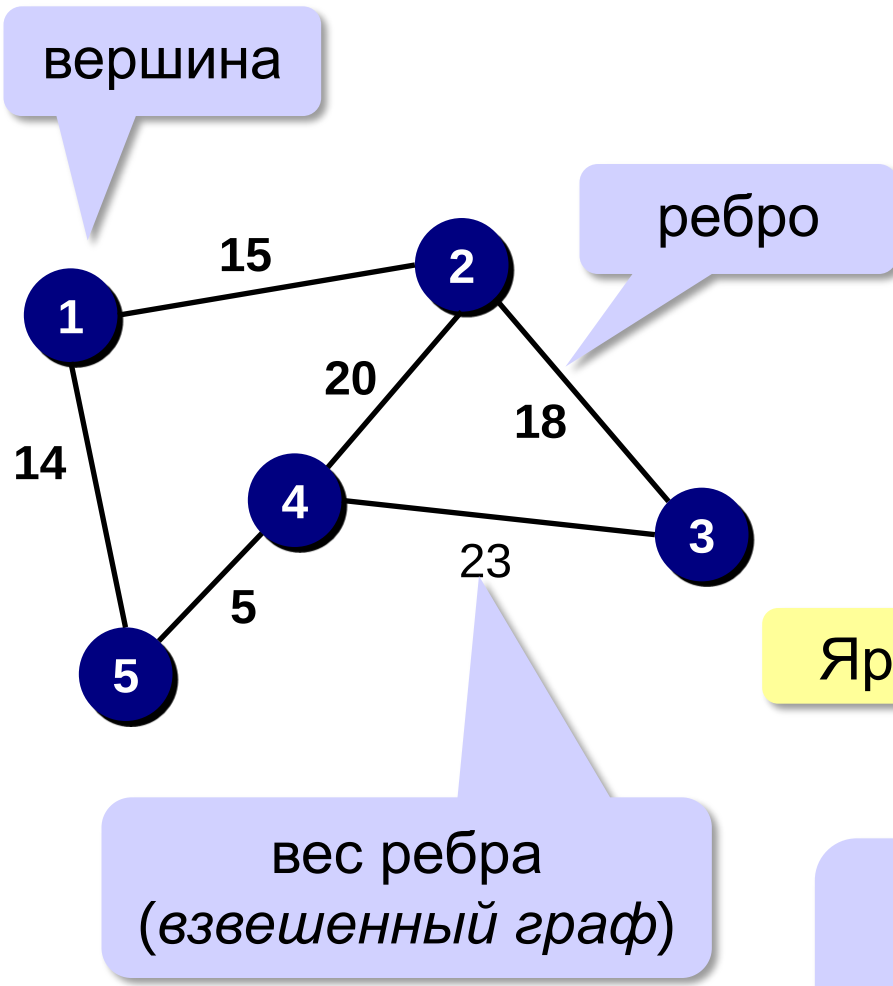
Адекватность модели можно доказать только **экспериментом!**

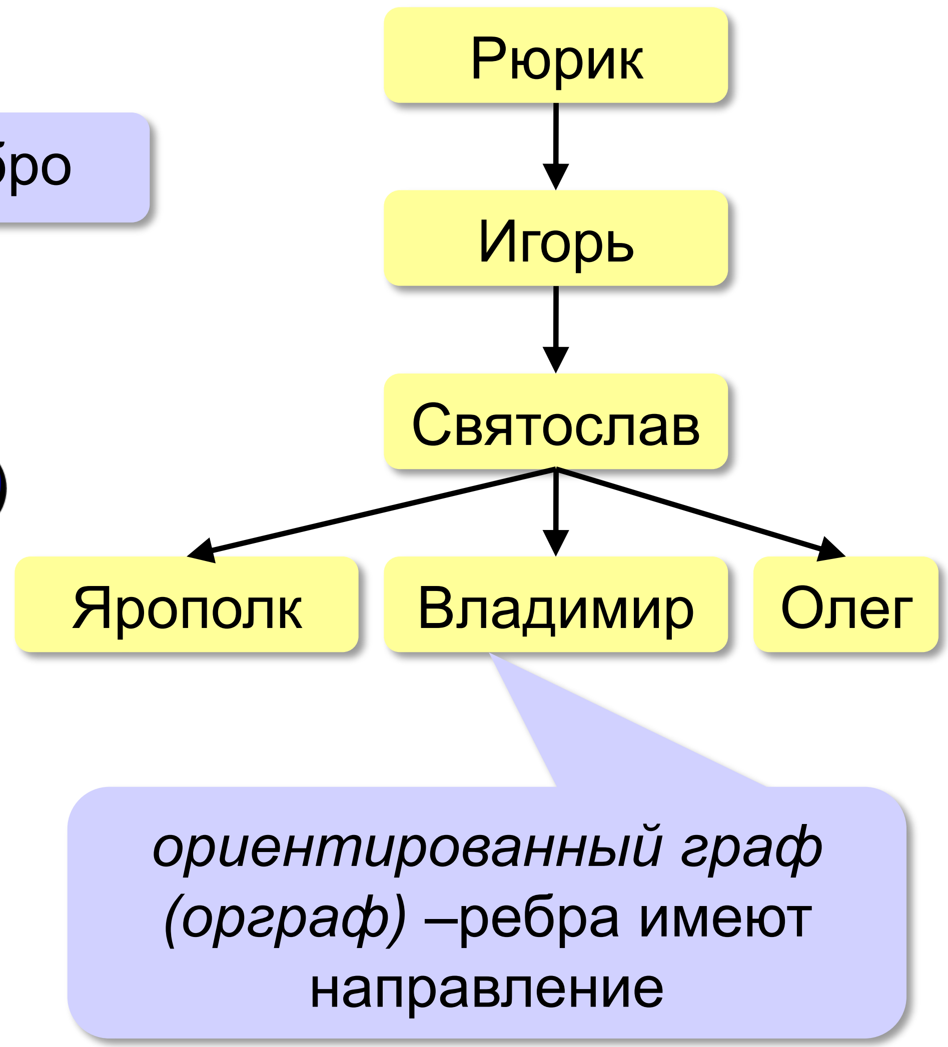
Модель всегда отличается от оригинала

Любая модель адекватна только при определенных условиях!

Системный подход

Граф – это набор вершин и соединяющих их ребер.

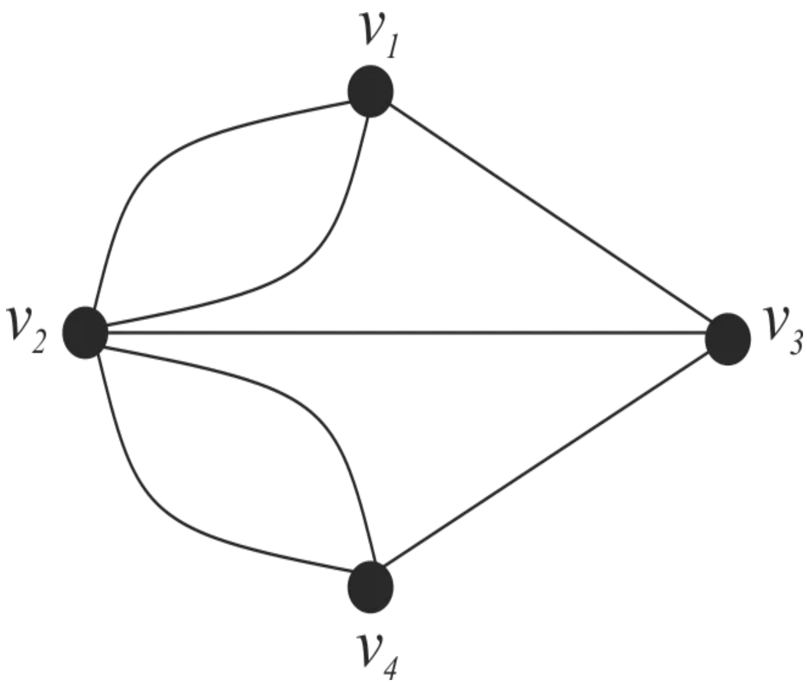




Родоначальником теории графов принято считать математика Леонарда Эйлера(1707-1783). Он предложил изящное решение знаменитой задачи о 7 Кенигсбергских мостах в 1736 году, а также придумал общий метод решения подобных задач.

по легенде один из жителей Кенигсберга спросил у своего товарища, сможет ли он пройти во всем мостам, связывающим островки на реке Преголь и вернуться в ту же самую точку, побывав на каждом мосту ровно один раз ?

Решить на практике эту задачу никто из жителей не смог. Покорилась она лишь Эйлеру, в то время работавшему в Петербурге. Легендарный математик не только расставил все точки над i, но и разработал общий принцип решения таких задач.



Эйлер схематически изобразил структуру, которую образуют мосты и назвал её "**графом"**. Точки на нём он назвал **"вершинами"**, а соединяющие их линии - **"ребрами"**.

Ключевая догадка Эйлера состояла в том, чтобы подсчитать, **сколько ребер выходит из каждой вершины**. На нашем рисунке:

- из 1-ой - выходит три ребра;
- из 2-ой - пять ребер;
- из 3-ой - три ребра;
- из 4-ой - три ребра.

Все четыре вершины графа оказались "нечетными".

Немного поэкспериментировав, Эйлер вывел четыре основных правила для решения таких задач:

1. Число нечетных вершин графа всегда чётно. Невозможно начертить граф, который имел бы нечетное число нечетных вершин. (можете попробовать на досуге).

2. Если у графа все вершины четные, то его можно начертить одним росчерком пера, причем неважно, где начинать.

3. Если у графа две нечетные вершины, то его можно начертить одним росчерком пера, но начинать надо в одной из нечетных вершин, а закончить в другой.

4. Граф с более чем двумя нечетными вершинами построить одним росчерком пера невозможно.

Вы уже догадались, что задача о мостах Кёнигсберга решений не имеет, ведь в ней целых четыре нечетных вершины!

Одной из разновидностей графа является дерево.

Дерево — это совокупность элементов (вершин), в которой выделен один элемент (корень), а остальные элементы разбиты на непересекающиеся множества (поддеревья). Каждое поддерево является деревом, а его корень является потомком корня дерева, т. е. все элементы связаны между собой отношением «предок — потомок». В результате образуется иерархическая структура вершин. Частным случаем дерева является бинарное дерево, в котором каждая вершина может иметь не более двух потомков.
Деревья используются для представления родственных связей (генеалогическое дерево), для определения выигрышной стратегии в играх и т. д.

Ещё одной знакомой вам структурой данных являются таблицы, состоящие из строк и граф (столбцов, колонок), пересечение которых образуют ячейки. Таблицы применяют для наглядности и удобства сравнения показателей.

Пример 1 Построим таблицу, соответствующую неориентированному графу (рис. 3.5), отражающему схему дорог между некоторыми населёнными пунктами.

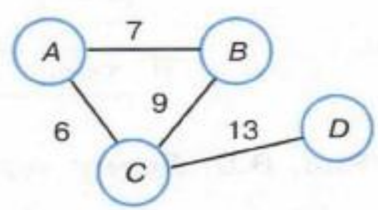


Рис. 3.5. Граф схемы дорог

Строки и столбцы таблицы будут соответствовать вершинам графа. Если две вершины являются смежными (соединены ребром), то в ячейку на пересечении соответствующих столбца и строки будем записывать вес этого ребра. В противном
случае (вершины не являются смежными) в ячейку будем записывать 0. Получится
таблица типа «объект — объект».
Такую таблицу называют матрицей смежности. Часто в матрицах смежности вместо нуля ставят знак минус, что обеспечивает большую наглядность.

	A	*B*	*C*	*D*
A	0	7	6	0
B	7	0	9	0
C	6	9	0	13
D	0	0	13	0

	A	*B*	*C*	*D*
A	–	7	6	–
B	7	–	9	–
C	6	9	–	13
D	–	–	13	–

Матрица смежности неориентированного графа симметрична относительно главной диагонали, идущей от левого верхнего угла к правому нижнему углу. У матрицы смежности ориентированного графа такая симметрия отсутствует.

Пример 2

Найдём кратчайший путь от вершины A до вершины F в графе, приведённом на рисунке

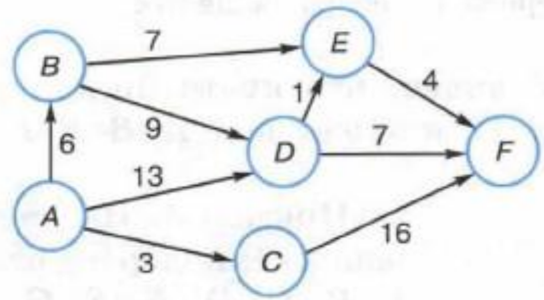


Рис. 3.7. Ориентированный граф

По матрице смежности построим полное дерево перебора решений

Составим матрицу смежности, соответствующую данному ориентированному графу:

	A	B	C	D	E	F
A	–	6	3	13	–	–
B	–	–	–	9	7	–
C	–	–	–	–	–	16
D	–	–	–	–	1	7
E	–	–	–	–	–	4
F	–	–	–	–	–	–

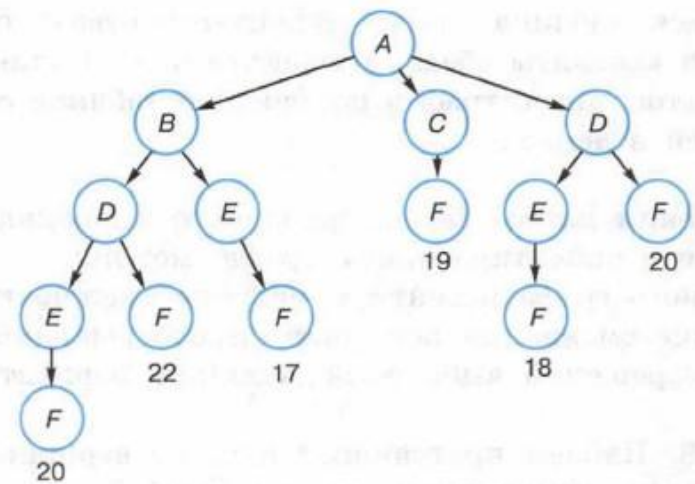


Рис. 3.8. Полное дерево перебора решений

На рисунке 3.8 видно, что кратчайший путь из вершины A в вершину F равен 17 и имеет вид A-B-E-F.

Пример 3 На рисунке 3.9 представлена схема дорог, связывающих города A, B, C, D, E, F, G.
По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько разных путей существует из города A в город G?

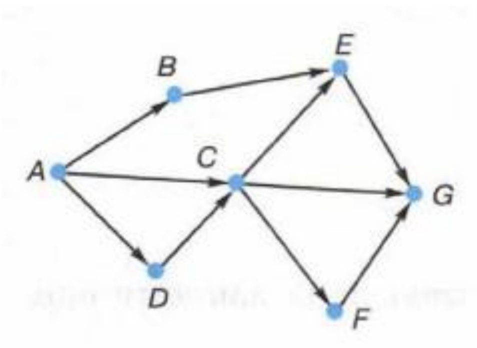
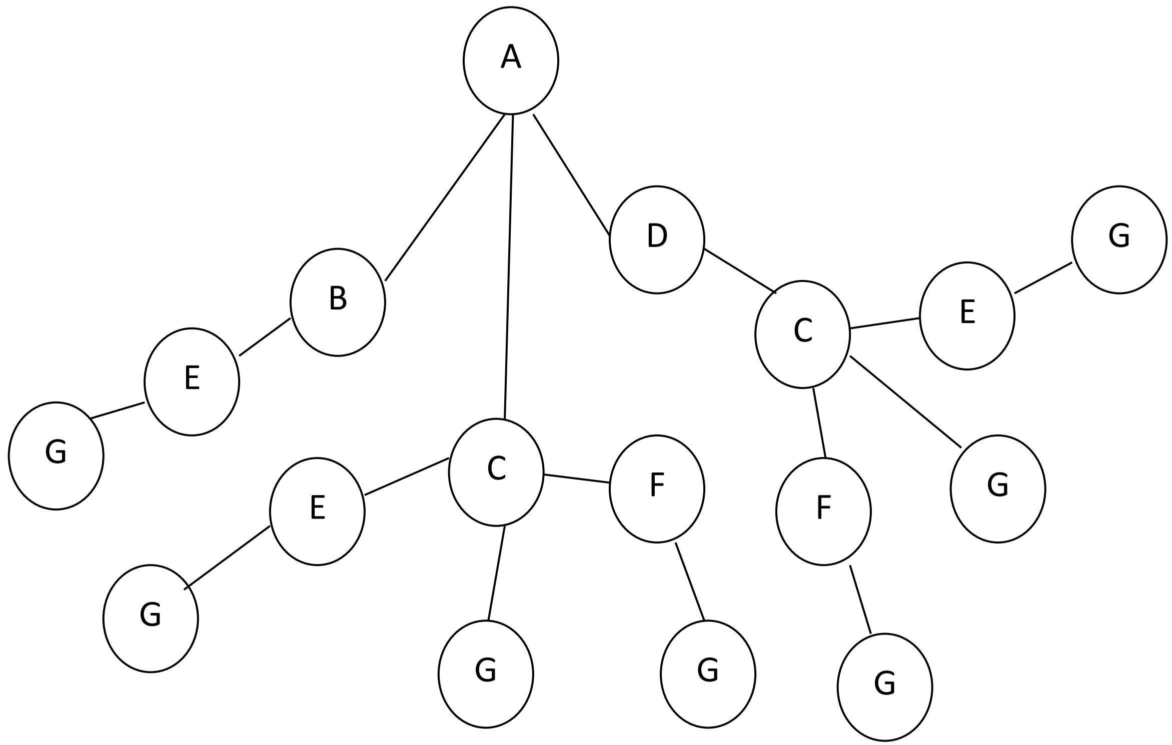


Рис. 3.9. Схема дорог

Постройте дерево и подсчитайте число дорог из города A в город G самостоятельно.

Решение

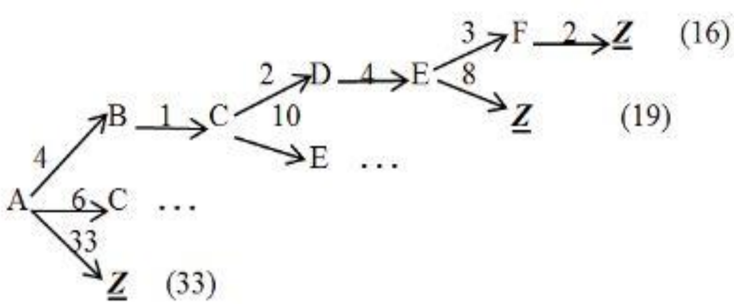


Ответ: 7 дорог

Пример 4

	A	B	C	D	E	F	Z
A		4	6				33
B	4		1				
C	6	1		2	10		
D			2		4		
E			10	4		3	8
F					3		2
Z	33				8	2	

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, Z построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.)
Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и Z (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).
Выберите правильный ответ:
1) 13 2) 16 3) 19 4) 21

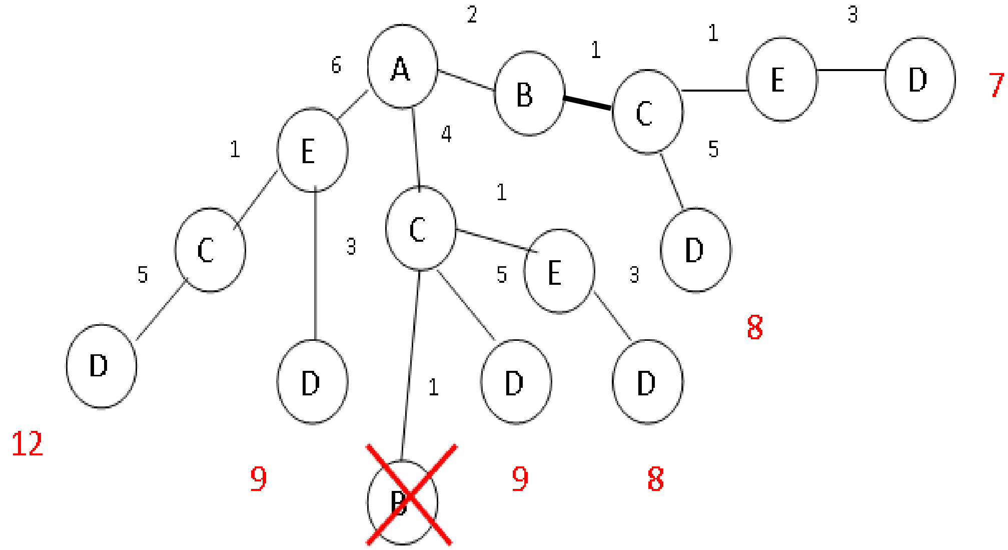


При решении этой задачи тоже не следует полагаться на простой визуальный анализ таблицы. Чтобы избежать ошибок, построим дерево с корнем в вершине A и листьями в вершине Z. При этом нам не нужно выписывать все ветки. Второй путь из A в C (AC=6) длиннее первого (ABC=5), значит и весь маршрут через него будет длиннее.
Второй путь из C в E (CE=10) длиннее первого (CDE=6), значит и весь маршрут через него будет длиннее.
Нам остается сложить длины всех отрезков и выбрать маршрут с наименьшей длиной.
Это верхняя ветка дерева с длиной 16.
Ответ: 2

Пример 5 Кратчайшие пути

	A	B	C	D	E
A		2	4		6
B	2		1		
C	4	1		5	1
D			5		3
E	6		1	3	

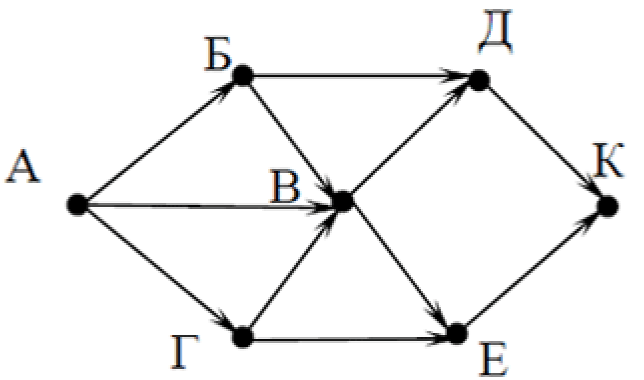
Определите кратчайший путь между пунктами A и D.

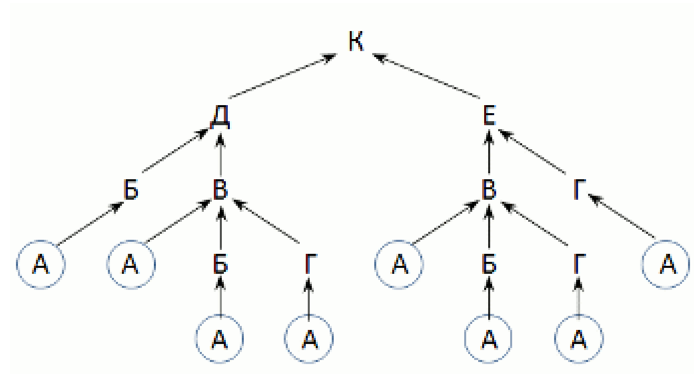


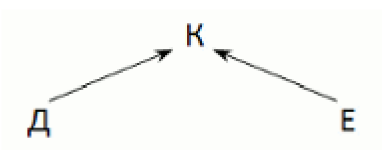
дерево возможных маршрутов

Пример 6 Количество путей

Сколько существует различных путей из А в К?







Графический способ. Начнем с конца. В точку **К** можно попасть двумя способами: из точки **Д** и из точки **Е**.

В точку **Д** можно попасть из точек **Б** и **В**. А в точку **Е** из точек **В** и **Г** и т.д. Ход рассуждения отображен на схематичном рисунке.

Из рисунка видно, что у нас получилось различных 8 путей от начального пункта **А** до конечного пункта **К**.
Ответ: 8

Этапы моделирования

I. Постановка задачи

- **исследование оригинала**

  изучение сущности объекта или явления
- **анализ («что будет, если …»)**

  научиться прогнозировать последствий при различных воздействиях на оригинал
- **синтез («как сделать, чтобы …»)**

  научиться управлять оригиналом, оказывая на него воздействия
- **оптимизация («как сделать лучше»)**

  выбор наилучшего решения в заданных условиях

! **Ошибки при постановке задачи приводят к наиболее тяжелым последствиям!**

I. Постановка задачи

Хорошо поставленная задача:

- описаны все связи между исходными данными и результатом
- известны все исходные данные
- решение существует
- задача имеет единственное решение

Примеры плохо поставленных задач:

- Винни Пух и Пятачок построили ловушку для слонопотама. Удастся ли его поймать?
- Малыш и Карлсон решили по–братски разделить два орешка – большой и маленький. Как это сделать?
- Найти максимальное значение функции $y = x^2$ (нет решений).
- Найти функцию, которая проходит через точки (0,1) и (1,0) (неединственное решение).

II. Разработка модели

- **выбрать тип модели**
- **определить *существенные* свойства оригинала,** которые нужно включить в модель, отбросить несущественные (для данной задачи)
- **построить формальную модель** это модель, записанная на *формальном языке* (математика, логика, …) и отражающая только существенные свойства оригинала
- **разработать алгоритм работы модели** **алгоритм** – это четко определенный порядок действий, которые нужно выполнить для решения задачи

III. Тестирование модели

Тестирование – это проверка модели на простых исходных данных с известным результатом.

Примеры:

- устройство для сложения многозначных чисел – проверка на однозначных числах
- модель движения корабля – если руль стоит ровно, курс не должен меняться; если руль повернуть влево, корабль должен идти вправо
- модель накопления денег в банке – при ставке 0% сумма не должна изменяться

Модель прошла тестирование. Гарантирует ли это ее правильность?

IV. Эксперимент с моделью

Эксперимент – это исследование модели в интересующих нас условиях.

Примеры:

- устройство для сложения чисел – работа с многозначными числами
- модель движения корабля – исследование в условиях морского волнения
- модель накопления денег в банке – расчеты при ненулевой ставке

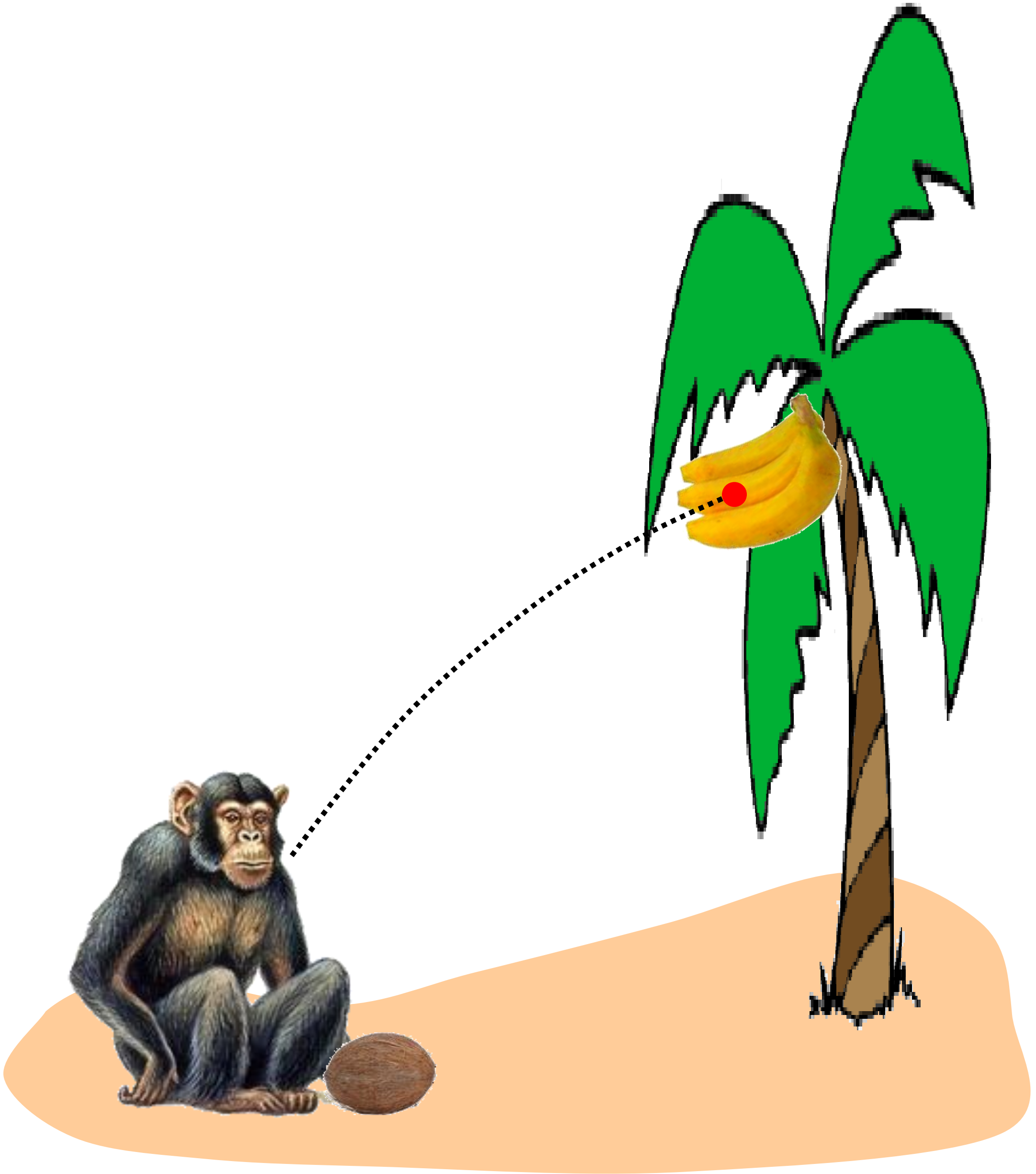
Можно ли 100%-но верить результатам?

V. Проверка практикой, анализ результатов

Возможные выводы:

- задача решена, модель адекватна
- необходимо изменить алгоритм или условия моделирования
- необходимо изменить модель (например, учесть дополнительные свойства)
- необходимо изменить постановку задачи

Пример.



Задача. Обезьяна хочет сбить бананы на пальме. Как ей надо кинуть кокос, чтобы попасть им в бананы.

Анализ задачи:

- все ли исходные данные известны?
- есть ли решение?
- единственно ли решение?

I. Постановка задачи

Допущения:

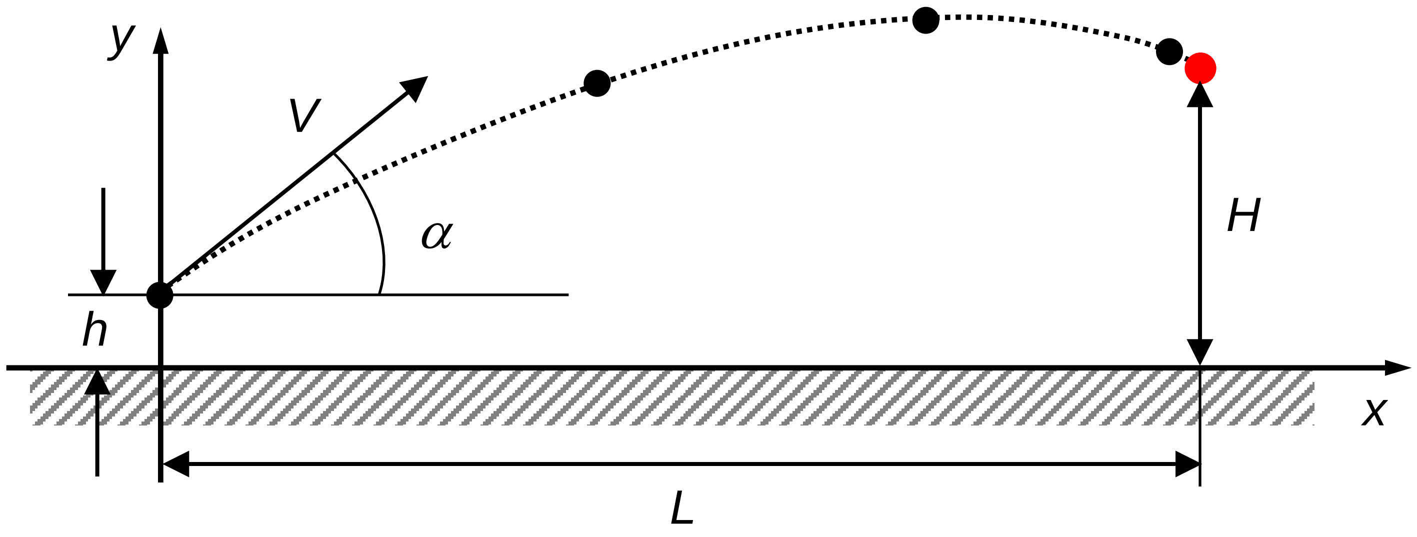
- кокос и банан считаем материальными точками
- расстояние до пальмы известно
- рост обезьяны известен
- высота, на которой висит банан, известна
- обезьяна бросает кокос с известной начальной скоростью
- сопротивление воздуха не учитываем

При этих условиях требуется найти начальный угол, под которым надо бросить кокос.

? Всегда ли есть решение?

II. Разработка модели

Графическая модель



Формальная (математическая) модель

$$x = V\cos\alpha\cdot t, \qquad y = h + V\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Задача: найти *t*, α, при которых

$$V\cos\alpha\cdot t = L, \qquad h + V\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2} = H$$

III. Тестирование модели

Математическая модель

$$x = V\cos\alpha \cdot t$$

$$y = h + V\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

- при нулевой скорости кокос падает вертикально вниз
- при $t=0$ координаты равны $(0,h)$
- при броске вертикально вверх (α=90°) координата x не меняется
- при некотором t координата y начинает уменьшаться (ветви параболы вниз)

Противоречий не обнаружено!

IV. Эксперимент

Метод I.

Меняем угол α. Для выбранного угла α строим траекторию полета ореха. Если она проходит выше банана, уменьшаем угол, если ниже – увеличиваем.

Метод II.

Из первого равенства выражаем время полета:

$$V\cos\alpha\cdot t = L \quad\Rightarrow\quad t = \frac{L}{V\cos\alpha}$$

Меняем угол α. Для выбранного угла α считаем t, а затем – значение y при этом t. Если оно больше H, уменьшаем угол, если меньше – увеличиваем.

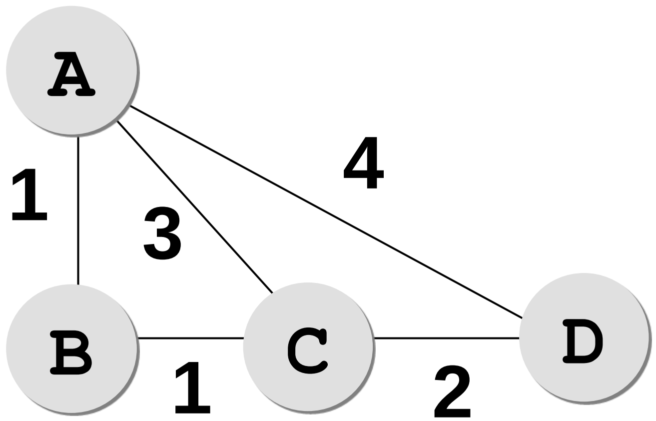
не надо строить всю траекторию для каждого α

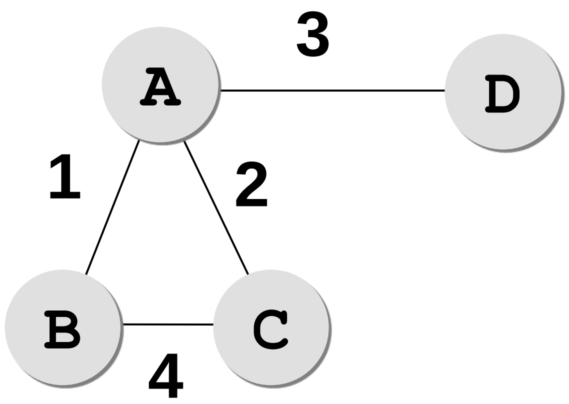
V. Анализ результатов

1. Всегда ли обезьяна может сбить банан?
2. Что изменится, если обезьяна может бросать кокос с разной силой (с разной начальной скоростью)?
3. Что изменится, если кокос и бананы не считать материальными точками?
4. Что изменится, если требуется учесть сопротивление воздуха?
5. Что изменится, если дерево качается?

Самостоятельная работа

1) Заполните таблицу





	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

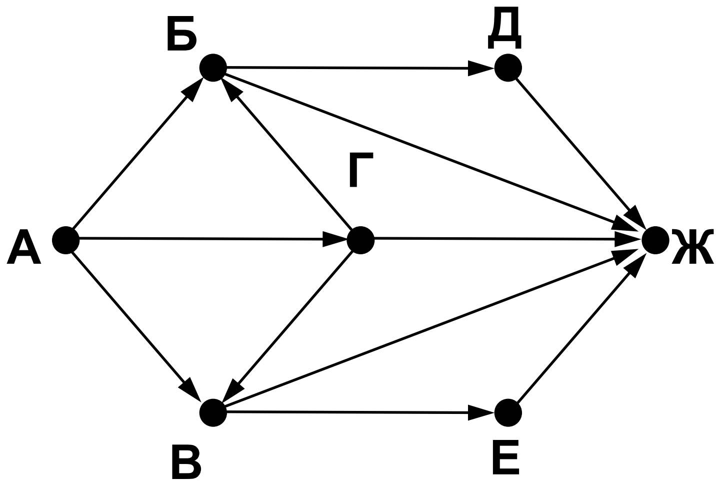
2)

	A	B	C	D	E
A		2	4		
B	2		1		7
C	4	1		3	5
D			3		3
E		7	5	3	

Определите кратчайший путь между пунктами A и E.

3)Количество путей

Сколько существует различных путей из А в Ж?



Спасибо за внимание