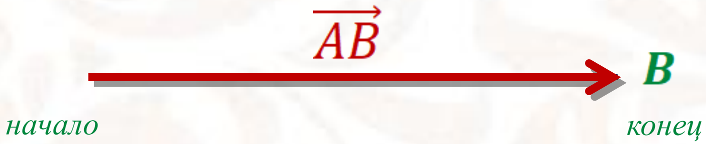
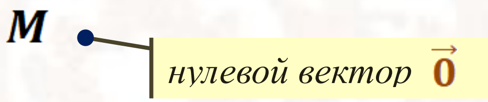
Понятие вектора. Длина вектора. Равенство векторов

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом, называется **направленным отрезком** или **вектором**.

Любая точка пространства также является вектором, **нулевым вектором**.





$$\boxed{|\overrightarrow{AB}| = AB}$$

$$\boxed{|\vec{0}| = 0}$$

Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Сонаправленными называют ненулевые коллинеарные векторы с одинаковыми направлениями.

$$\boxed{\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}}$$

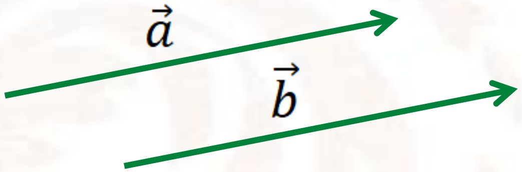
Противоположно направленными называют ненулевые коллинеарные векторы с противоположными направлениями.

$$\boxed{\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}}$$

Векторы называют равными, если они сонаправлены и их длины равны.

$\boldsymbol{\vec{a} = \vec{b}}$:

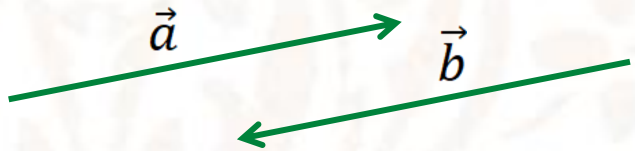
1. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
2. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$



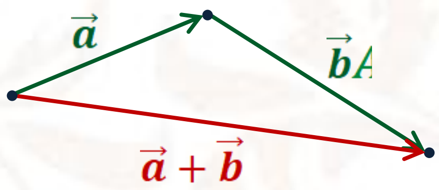
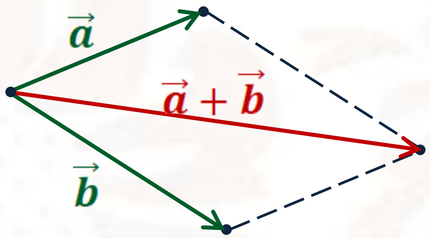
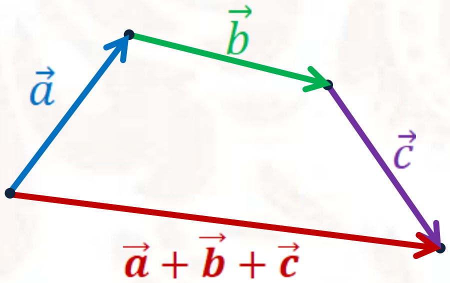
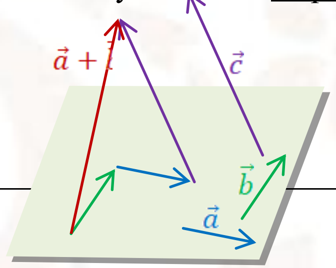
Векторы называют противоположными, если они противоположно направлены и их длины равны.

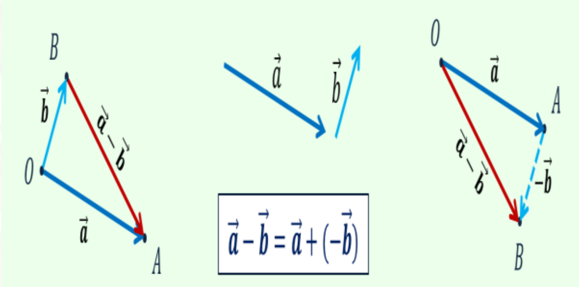
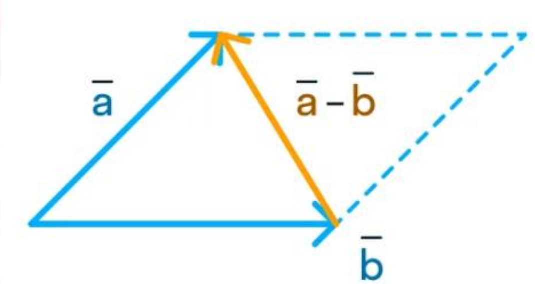
$\boldsymbol{\vec{a} = -\vec{b}}$:

1. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
2. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$



1. **Заполните таблицу**

Операция	**Чертеж**	**Описание**
Сложение векторов Записать свойства сложения векторов (переместительный и сочетательный законы)	правило треугольника 	
	правило параллелограмма 	
	правило многоугольника 	
	правило многоугольника <u>в пространстве</u> 	

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Вычитание векторов</td><td>правило треугольника

</td><td></td></tr>
<tr><td>метод параллелограмма

</td><td></td></tr>
</table>

Умножение вектора на число.
Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$.

$$k \cdot \vec{a} = \vec{b}$$

Лемма. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$,

то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Если $k < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

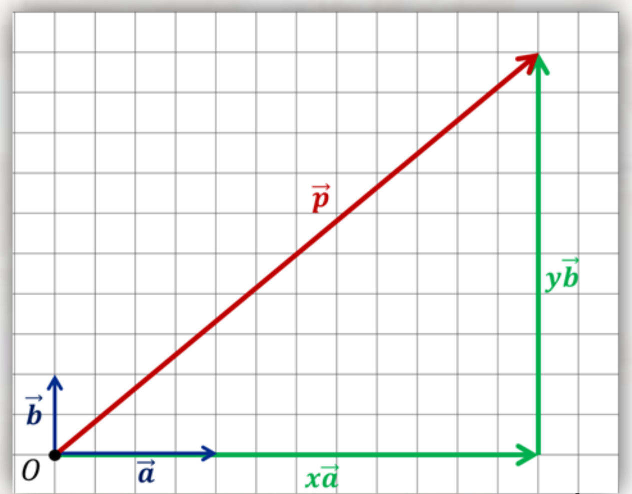
Если $k > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Свойства умножения вектора на число:

$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ $\qquad (k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ $\qquad k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

Теорема. На плоскости любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$



Правило параллелепипеда.
Разложение вектора по трём некомпланарным векторам

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.
ИЛИ: если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

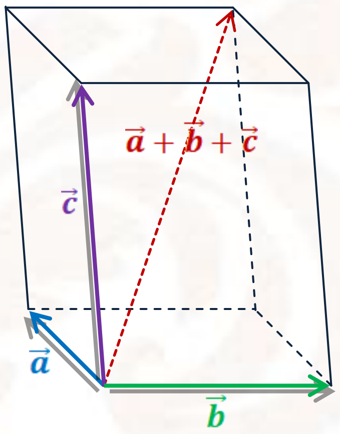
Признак компланарности трёх векторов.
Если, вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

то есть представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – некоторые числа,

то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Правило параллелепипеда

сложения трёх некомпланарных векторов:



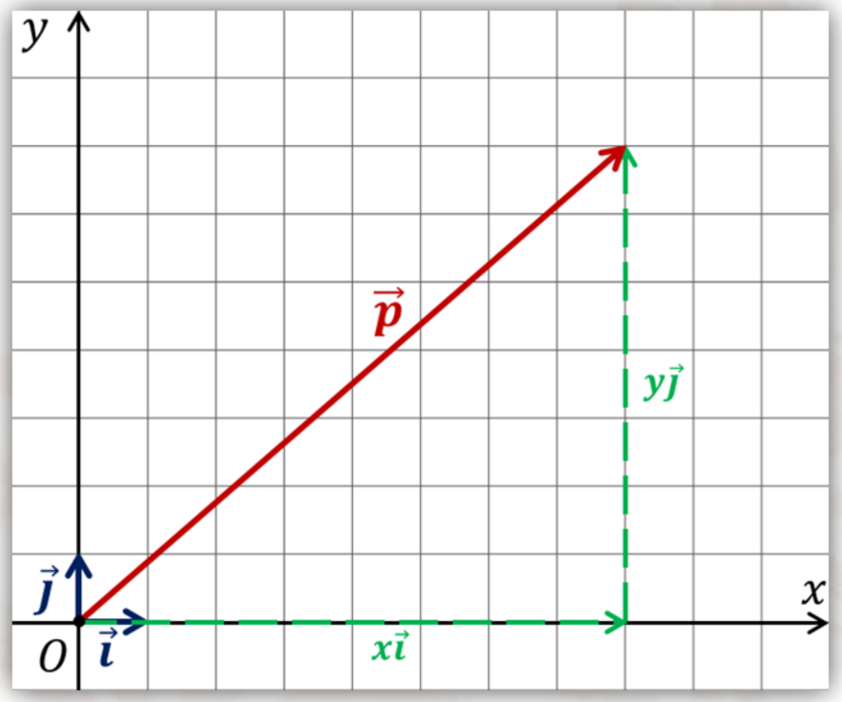
Теорема. Любой вектор можно разложить по трём некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

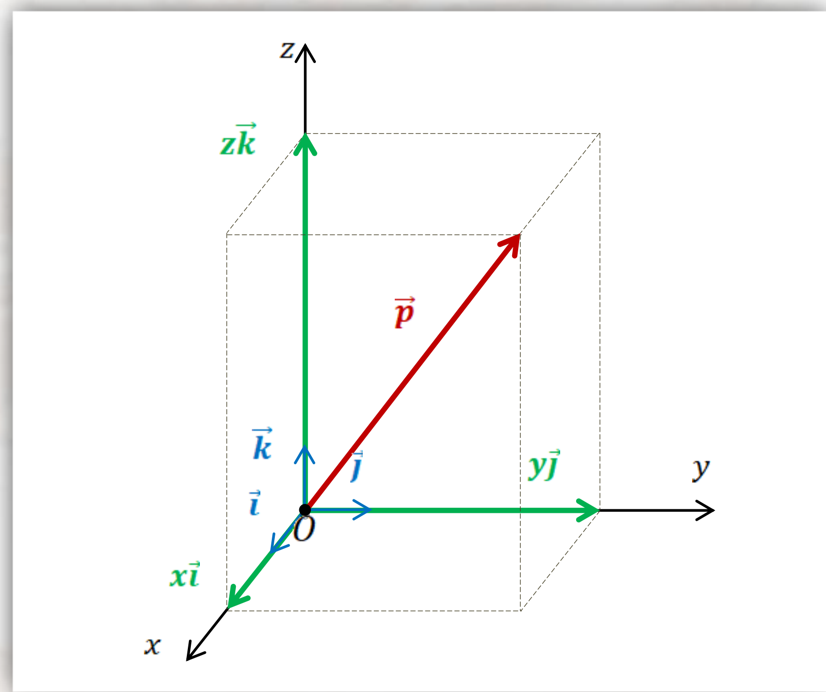
$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

Координаты вектора

$$\vec{p}\,\{x; y\}$$

$$\vec{p}\,\{x; y; z\}$$





$\vec{a}\,\{x_1;\ y_1\}, \vec{b}\,\{x_2;\ y_2\}$

$(\vec{a}+\vec{b})\,\{x_1+x_2;\ y_1+y_2\}$

$\vec{a}\,\{x_1;\ y_1\}, \vec{b}\,\{x_2;\ y_2\}$

$(\vec{a}-\vec{b})\,\{x_1-x_2;\ y_1-y_2\}$

$\vec{a}\,\{x_1;\ y_1\}, k$

$k\vec{a}\,\{kx_1;\ ky_1\}$

Простейшие задачи в координатах

Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца

A $(x_1; y_1)$ B $(x_2; y_2)$

A $(x_1; y_1; z_1)$ B $(x_2; y_2; z_2)$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\,\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\,\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

Определение координат середины отрезка

A $(x_1; y_1)$ C B $(x_2; y_2)$

$$\boldsymbol{C}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

A $(x_1; y_1; z_1)$ C B $(x_2; y_2; z_2)$

$$\boldsymbol{C}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Вычисление длины вектора по его координатам

$$\vec{\boldsymbol{a}}\,\{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}\} \quad \Rightarrow \quad |\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}\,\{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z}\} \quad \Rightarrow \quad |\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2}$$

Определение расстояния между двумя точками

$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$

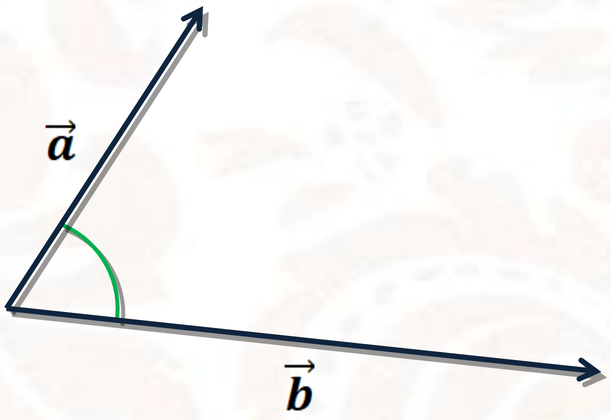
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Скалярное произведение векторов

$\vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2\}$



$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}}$$

Скалярное произведение <u>в координатах</u>:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}$$

Формула вычисления косинуса угла между двумя векторами:

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

2. Ответьте на вопросы:

1. Верно ли, что:
   - 1.1. длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна длине вектора $\overrightarrow{BA}$?
   - 1.2. если длины векторов равны, то векторы равны?
   - 1.3. равные векторы имеют равные длины?
   - 1.4. разность двух векторов может равняться нулевому вектору?
   - 1.5. разность двух векторов может равняться нулю?
   - 1.6. чем больше число k, тем больше длина вектора k$\vec{a}$?
   - 1.7. от одной точки можно отложить два различных не нулевых равных вектора?
2. Могут ли... Может ли... Верно ли, что...
   - 2.1 коллинеарные векторы не лежать на одной прямой?
   - 2.2 векторы, лежащие на параллельных прямых, не являются коллинеарными?
   - 2.3 противоположные векторы не являются коллинеарными?
   - 2.4 противолежащие векторы не лежат на одной прямой?
   - 2.5 скалярное произведение двух векторов равняться произведению их длин?
   - 2.6 скалярное произведение двух сонаправленных векторов быть отрицательным?
   - 2.7 скалярное произведение векторов является вектором?
   - 2.8 если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то один из векторов – нулевой?
   - 2.9 если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то данные векторы перпендикулярны?