

Памятка для решения логарифмических уравнений

При решении логарифмических уравнений полезно помнить некоторые **свойства логарифмов**:

$a^{\log_a b} = b$ - основное логарифмическое тождество

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1;$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y; \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x; \quad \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n};$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a};$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ - формула перехода к новому основанию}$$

Замечание: $\lg t$ – десятичный логарифм (по основанию 10)

$\ln t$ – натуральный логарифм (по основанию e)

№	МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ	ПРИМЕРЫ
1.	По определению логарифма <i>Уравнения вида</i> $\log_a f(x) = b, f(x) > 0$ выражение, содержащее неизвестное число, а число $a > 0, a \neq 1$. Для решения таких уравнений надо: 1) воспользоваться определением логарифма: $f(x) = a^b$; 2) сделать проверку или найти область допустимых значений для неизвестного числа и отобрать соответствующие им корни (решения). Если $\log_a f(x) = b$, то $f(x) = a^b, a > 0, a \neq 1$.	Решить уравнение $\log_2 (x-15) = 4$. $x-15=2^4, x-15=16, x=15+16, x=31$.
2.	Потенцирование <i>Уравнения первой степени относительно логарифма, при решении которых используются свойства логарифмов.</i> Для решения таких уравнений надо: 1) используя свойства логарифмов, преобразовать уравнение; 2) решить полученное уравнение; 3) сделать проверку или найти область допустимых значений для неизвестного числа и отобрать соответствующие им корни (решения). $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) (f(x) > 0 \text{ или } g(x) > 0)$.	$\log_5 (4x+17) = \log_5 (4x-3) + 1$; $\log_5 (4x+17) = \log_5 5(4x-3)$; $4x+17 = 5(4x-3)$; ОДЗ: $(4x+17) > 0, (4x-3) > 0$. Ответ: 2. $\log_2 (x-1) - \log_2 (2x-7) = 1 + \log_{\frac{1}{2}} (x-4)$; $\log_2 (x-1) = \log_2 (2x-7) + \log_2 2 - \log_2 (x-4)$; $\log_2 (x-1) + \log_2 (x-4) = \log_2 ((2x-7) \cdot 2)$; $\log_2 ((x-1) \cdot (x-4)) = \log_2 ((2x-7) \cdot 2)$; ОДЗ: $x-1 > 0; x-4 > 0; (2x-7) > 0$. Ответ: 6.

3.	Введение новой переменной <i>Уравнение второй и выше степени относительно логарифма.</i> Для решения таких уравнений надо: 1. сделать замену переменной; 2. решить полученное уравнение; 3. сделать обратную замену; 4. решить полученное уравнение; 5. сделать проверку или найти область допустимых значений для неизвестного числа и отобрать соответствующие им корни (решения).	$\log_3^2 x^3 - \log_3 x^2 - 7 = 0;$ ОДЗ: $x > 0;$ $9 \log_3^2 x - 2 \log_3 x - 7 = 0.$ Введем обозначение $t = \log_3 x$. $9t^2 - 2t - 7 = 0;$ $t_1 = 1, t_2 = -\frac{7}{9}.$ Произведем обратную замену. $\log_3 x = 1, x = 3.$ $\log_3 x = -\frac{7}{9}, x = 3^{-\frac{7}{9}}$ Найденные корни принадлежат ОДЗ. Ответ: 3; $3^{-\frac{7}{9}}$
4.	Логарифмирование обеих частей уравнения <i>Уравнения, содержащие неизвестное в основании и в показателе степени.</i> Для решения таких уравнений надо: 1. прологарифмовать уравнение; 2. решить полученное уравнение; 3. сделать проверку или найти область допустимых значений для неизвестного числа и отобрать соответствующие им корни (решения).	Решить уравнение $(x^{\lg x - 1}) = 100.$ Поскольку нет возможности выразить обе части уравнения через степени с одинаковым основанием, то логарифмируем по основанию 10 (в уравнении есть десятичный логарифм, да и для числа 100 это основание удобно). Логарифмы равных положительных чисел (фактически одного и того же числа, выраженного по-разному) равны, поэтому логарифм левой части равен логарифму правой части: $\lg(x^{\lg x - 1}) = \lg 100,$ $(\lg x - 1)\lg x = 2, \lg^2 x - \lg x - 2 = 0,$ $\lg x = -1, \lg x = 2.$ $x = 0,1$ $x = 100.$ Легко убедиться, что корни не посторонние.
5.	Приведение к одному основанию	Решите уравнение: $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 6.$ Решение: ОДЗ: $x > 0$. Перейдем к основанию 3. $\log_3 x + 2 \log_3 x = 6,$ или $3 \log_3 x = 6; \log_3 x = 2, x = 9.$ Ответ: 9.
6.	Функционально-графический метод	Решить графически уравнение: $\log_2 x = 3 - x.$ Можно построить графики функций $y = \log_2 x$ и $y = 3 - x.$ Есть способ, позволяющий не строить графики. Он заключается в следующем: если одна из

		функций $y = f(x)$ возрастает, а другая $y = g(x)$ убывает на промежутке X, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня на промежутке X. Если корень имеется, то его можно угадать. В нашем случае функция $y = \log_2 x$ возрастает при $x > 0$, а функция $y = 3 - x$ убывает при всех значениях x, в том числе и при $x > 0$, значит, уравнение имеет не более одного корня. Заметим, что при $x = 2$ уравнение обращается в верное равенство. Ответ: 2
--	--	--