Какими методами можно решать показательные неравенства

Определение показательного уравнения и неравенства

Определение 1

Показательная функция — функция, которая имеет вид:

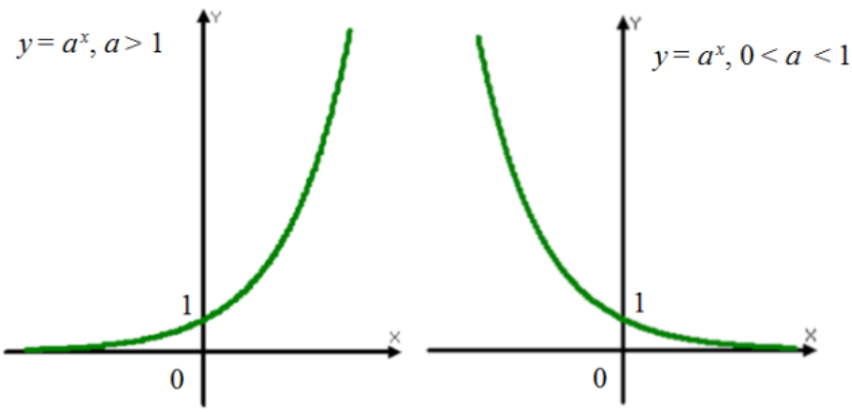
$y = a^x$

Здесь a > 0 и отлично от единицы.

Показательная функция вида $y = a^x$ обладает следующими свойствами:

Свойство	$a > 1$	$0 < a < 1$
Область определения	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений	$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
Монотонность	Возрастает	Убывает
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная

Показательная функция, изображенная на графике, представляет собой экспоненту:



Источник: yourtutor.info

Определение 2

Показательные уравнения — уравнения с неизвестной переменной, которая расположена только в показателях неких степеней.

Решение показательных уравнений сводится к применению теоремы.

Теорема 1

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где a > 0, $a \neq 1$) равносильно уравнению f(x)=g(x).

Кроме основной теоремы, в решении задач на показательные уравнения пригодятся ключевые закономерности и операции с использованием степеней:

$$
\boxed{\begin{array}{l}
a>0,\, b>0: \\
a^0=1,\, 1^x=1; \\
a^{\frac{k}{n}}=\sqrt[n]{a^k}\ (k\in Z,\, n\in N); \\
a^{-x}=\frac{1}{a^x}; \\
a^x\cdot a^y=a^{x+y}; \\
\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}; \\
(a^x)^y=a^{xy}; \\
a^x\cdot b^x=(ab)^x; \\
\frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x.
\end{array}}
$$

Источник: yourtutor.info

Определение 3

Показательные неравенства в теории — неравенства с неизвестной переменной, которая находится только в показателях каких-либо степеней.

Показательные неравенства решают с помощью теоремы, которая не теряет своей актуальности и полезна при решении разнообразных задач в средних классах школы.

Теорема 2

Когда $a > 1$, неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ является равносильным неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$. При $0 < a < 1$ показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ является равносильным неравенству, противоположному по смыслу: $f(x) < g(x)$.

Метод приведения к одинаковому основанию

Большинство уравнений, которые записаны в виде: $a^x=b$ (при **a** и **b** отличных от нуля), решают путем замены **b** какой-то степенью числа **a**. Сложность такого проекта заключается в поиске для системы данных чисел общего множителя.

Правило 1

При одинаковых основаниях и отличающихся показателей степени числа умножают, и их степени складывают, а деление выполняют, вычитая степени.

Рассмотрим вариант приведения к одинаковому основанию на конкретном примере. Предположим, что требуется найти корни показательного уравнения:

$${\frac{1}{64^2}}^{-x}=\sqrt{\frac{1}{8}}$$

Заметим, что для чисел 64 и 8 существует общий множитель. Это число 2. Выполним соответствующую замену:

$64^2=2^{12}$

$8=2^3$

Тогда уравнение можно записать в таком виде:

$${\frac{1}{2^{12}}}^{-x}=\sqrt{\frac{1}{2^3}}$$

$${\frac{1}{2}}^{-12x}=\sqrt{\frac{1}{2^3}}$$

$(\frac{1}{2})^{-12x} = (\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}$

$-12x = \frac{3}{2}$

$x = -\frac{1}{8}$

Разберем задачу более сложную, где потребуется выполнять отдельные преобразования каждого компонента. Решим пример:

$(0{,}5)^{x^2} \times 4^{x+1} = 64^{-1}$

Определим общее основание для показательных функций:

$0{,}5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

$4 = 2^2$

$64 = 2^6$

Выполним преобразования:

$(2^{-1})^{x^2} \times (2^2)^{x+1} = (2^6)^{-1}$

$(2)^{-x^2} \times (2^2)^{x+1} = (2^6)^{-1}$

$2^{-x^2} \times 2^{2x+2} = 2^{-6}$

$2^{-x^2+2x+2} = 2^{-6}$

$-x^2 + 2x + 2 = -6$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

Данное уравнение имеет два решения : $x_1=-2$; $x_2=4$

Метод приведения к одинаковой степени

С помощью правила приведения к одинаковому основанию не во всех случаях удается решить показательные уравнения. Существует еще один распространенный метод поиска корней. Он заключается в том, что требуется выполнить преобразования не оснований, а показателей степени. Этот способ применим только в тех ситуациях, когда уравнение предполагает умножение или деление.

Правило 2

Числа, которые имеют разные основания и одинаковые степенные показатели, умножают путем перемножения только оснований. Степень при этом не меняется:

$a^x b^x = (ab)^x$

Рассмотрим решение типичного примера на использование метода приведения к одинаковой степени:

$5^{2x-4} = (49)^{2-x}$

Заметим, что обе части уравнения не обладают общими множителями. По этой причине их сложно привести к единому основанию. Целесообразно начать преобразования с показателей:

$5^{2x-4} = (49)^{2-x}$

$5^{2x-4} = (7)^{4-2x}$

$5^{2x-4} = (\frac{1}{7})^{2x-4}$

$35^{2x-4} = 1$

$2x - 4 = 0$

$x = 2$

Закрепим материал с помощью решения еще одного уравнения:

$$2^{x-2}=5^{2-x}$$

Задача заключается в приведении обеих частей уравнения к одинаковым показателям степени. В первую очередь следует выполнить преобразования справа, используя свойство степенных функций:

$$2^{x-2}=\frac{1}{5}^{x-2}$$

Далее приступим к умножению обеих частей уравнения на 5^{x-2}. Получим:

$$2^{x-2}\times 5^{x-2}=1$$

$$10^{x-2}=1$$

$$10^{x-2}=10^0$$

$$x-2=0$$

$$x=2$$

Метод замены переменной

По названию метода понятно, что его смысл состоит во введении такой переменной, которая позволит существенно упростить решение показательного уравнения. Алгоритм действий:

- введение переменной;
- решение упрощенного уравнения;
- обратная замена;
- запись корней.

Рассмотрим данную методику на конкретном примере уравнения:

$$4^x+2^{x+1}-3=0$$

Заметим, что:

$$4^x=2^{2x}=(2^x)^2$$

Преобразуем начальное уравнение:

$$(2^x)^2+2^{x+1}-3=0$$

Дополнительно представим 2^{x+1} как $2\cdot 2^x$. Тогда можно выполнить следующую замену:

$$t=2^x$$

Преобразуем начальное уравнение:

$$t^2+2t-3=0$$

Решением данного уравнения являются:

$$t_1=-3,\ t_2=1.$$

Вернемся к переменной **x**. В процессе замены какой-то степени новой переменной, то есть $t=a^x$, следует выбирать корни с положительными значениями. По этой причине $t_1 = -3$ является лишним.

Подходит в этом случае только второй корень:

$t_2 = 1$

В таком случае:

$2^x = 1$

$x = 0$

Рассмотрим еще один пример:

$3^{3x+1} - 4 \cdot 9^x = 17 \cdot 3^x - 6$

Перед тем, как приступить к замене, следует преобразовать уравнение таким образом:

$3^{3x+1} = 3 \cdot (3^x)^3, 9^x = (3^x)^2.$

Введем обозначение:

$t = 3^x$

Тогда получим:

$3t^3 - 4t^2 = 17t - 63t^3 - 4t^2 - 17t + 6 = 0$

Зная, что при решении требуется получить в ответе t в виде какой-то степени тройки, можно попытаться подобрать один из корней уравнения. Предположим, что t = 1. Но данное число не является решением. Тогда попробуем следующий, t = 3:

$3 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 = 17 \cdot 3 - 6$

Слева получим:

81 - 36 = 45

Справа получим:

51 - 6 = 45

Первый корень найден. В результате расчеты упрощаются. Вспомним, что числа можно делить столбиком. Подобный метод применим и к многочленам. Здесь целесообразно воспользоваться теоремой.

Теорема 3

При **a**, которое является корнем многочлена P(x), можно P(x) поделить без остатка на x - a

Если использовать данную теорему при решении заданного уравнения, то получим, что $3t^3 - 4t^2 - 17t + 6$ можно разделить без остатка на (t-3). Определим одночлен, на который требуется умножить (t-3) для получения $3t^3 + \dots$. Этим одночленом является $3t^2$. В результате получим:

$3t^2(t-3) = 3t^3 - 9t^2.$

Найдем разность между $3t^3 - 4t^2 - 17t + 6$ и полученным выражением:

$3t^3-4t^2-17t+6-(3t^3-9t^2)=5t^2-17t+6.$

Далее найдем одночлен, на который можно умножить (t-3) для получения $5t^2+....$. Таковым является **5t**. В результате:

$5t(t-3)=5t^2-15t$

Аналогичным образом выполним вычитание:

$5t^2-17t+6-(5t^2-15t)=-2t+6.$

Затем следует умножить (t-3) на -2. Полученное выражение нужно отнять из оставшегося:

$-2t+6-3(t-3)=0.$

В частном накопили:

$3t^2+5t-2.$

В итоге начальный многочлен будет разложен таким образом:

$3t^3-4t^2-17t+6=(t-3)(3t^2+5t-2).$

Далее следует решить второе уравнение:

$3t^2+5t-2=0$.

Корнями этого уравнения являются:

$t_2=\frac{1}{3}, t_3=-2.$

В результате начальное уравнение примет вид:

$3t^3-4t^2-17t+6=0$

У этого уравнения имеется три решения:

$t_1=3, t_2=\frac{1}{3}, t_3=-2$

Так как третий корень меньше нуля, его следует исключить. Для первого и второго корня необходимо выполнить обратную замену:

$x_1=1, x_2=-1$

Метод выделения устойчивого выражения

Показательные уравнения решают путем выделения устойчивого выражения. Разберем данный способ на конкретном примере:

$4^x+4^{x-1}=4^{x+1}-11$

Заметим, что в этом уравнении число 4 возведено в разные степени. С другой стороны, степени являются простыми суммами переменной x и других чисел. Здесь нам помогут правила действий со степенями:

$a^{x+y}=a^x\cdot a^y$

$a^{x-y} = a^x : a^y = \frac{a^x}{a^y}$

Зная, что сумму показателей можно записать в виде умножения степеней, а вычитание достаточно просто преобразовать в деление, используем данные свойства:

$4^{x-1} = \frac{4^x}{4^1} = 4^x \cdot \frac{1}{4}$

$4^{x+1} = 4^x \cdot 4^1 = 4^x \cdot 4$

Применим это свойство к начальному уравнению и сгруппируем слагаемые с левой стороны:

$4^x + 4^x \cdot \frac{1}{4} = 4^x \cdot 4 - 11$

$4^x + 4^x \cdot \frac{1}{4} - 4^x \cdot 4 + 11 = 0$

Заметим, что первые по счету четыре слагаемые обладают компонентом 4^x, который допустимо вынести за скобки:

$4^x \cdot \left(1 + \frac{1}{4} - 4\right) + 11 = 0$

$4^x \cdot \frac{4 + 1 - 16}{4} + 11 = 0$

$4^x \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) = -11$

Далее необходимо выполнить деление всех частей уравнения на дробь $-\frac{11}{4}$, то есть умножить уравнение на перевернутую дробь $-\frac{4}{11}$. В результате:

$4^x \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) \cdot \left(-\frac{4}{11}\right) = -11 \cdot \left(-\frac{4}{11}\right)$

$4^x = 4$

$4^x = 4^1$

$x = 1$

Заметим, что в процессе решения уравнение было преобразовано в простейшее, что в дальнейшем упростило поиск корней. На одном из этапов за скобки был вынесен общий множитель 4^x. Данное выражение называют устойчивым.

Устойчивое выражение допускается обозначить, как новую переменную, либо выразить и получить ответ. В процессе решения показательных уравнений методом выделения устойчивого выражения следует руководствоваться правилом.

Правило 3

При решении показательного уравнения нужно определить в начальном уравнении устойчивое выражение, включающее в себя переменную, которую достаточно просто выделить из всех показательных функций.

Рассмотрим решение задачи повышенной сложности:

$5^{x+2} + 0{,}2^{-x-1} + 4 \cdot 5^{x+1} = 2$

Попытаемся выполнить преобразования степени, которая обладает основанием 0,2. К примеру, устраним десятичную дробь путем приведения ее к обычной:

$$0{,}2^{-x-1} = 0{,}2^{-(x+1)} = \left(\frac{2}{10}\right)^{-(x+1)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-(x+1)}$$

Заметим, что в знаменателе получили число 4, а также показатель стал отрицательным. Применим свойство действий со степенями. В результате:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{-(x+1)} = \left(\frac{5}{1}\right)^{x+1} = 5^{x+1}$$

Полная формула исключения отрицательных показателей имеет вид:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{-(x+1)} = \left(\frac{5}{1}\right)^{x+1} = 5^{x+1}$$

Можно выполнять действия и с одной дробью:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-(x+1)} = (5^{-1})^{-(x+1)} = 5^{(-1)\cdot(-(x+1))} = 5^{x+1}$$

С другой стороны, в последнем случае понадобятся навыки возведения степени в другую степень, при котором требуется суммировать показатели.

Независимо от выбранной методики, начальное показательное уравнение будет преобразовано таким образом:

$$5^{x+2} + 5^{x+1} + 4\cdot 5^{x+1} = 2$$

$$5^{x+2} + 5\cdot 5^{x+1} = 2$$

$$5^{x+2} + 5^1\cdot 5^{x+1} = 2$$

$$5^{x+2} + 5^{x+2} = 2$$

$$2\cdot 5^{x+2} = 2$$

$$5^{x+2} = 1$$

В результате решение исходного уравнения значительно упрощается. Зная, что $1 = 5^0$, запишем:

$$5^{x+2} = 5^0$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

Эффективным приемом при решении показательных уравнений является перевод десятичных дробей в обычные. В результате поиск корней становится проще.

Метод рационализации в показательных неравенствах

Рационализация бывает удобна не только в логарифмических неравенствах, а также в показательных. Принцип остается тем же самым, в общем виде он выглядит так:

$$a(x)^{f(x)} \geq a(x)^{g(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0, \\ a(x) > 0. \end{cases} \quad (*)$$

$f(x)$, $g(x)$ - некоторые функции, зависящие от x;
$a(x)$ - положительное основание показательной функции, в сложных примерах оно тоже может зависеть от x.

Посмотрим, как это работает на простом примере из обыкновенных показательных неравенств:

Пример 7

$$5^{2x-3} \geq 5^{x+4}$$

Пример совершенно элементарный, и мы обычно решаем такие без всякой рационализации.

Но он удобен для того, чтобы продемонстрировать, как работает метод. Надеюсь, вы помните, что метод рационализации сводится к равносильным преобразованиям. То есть мы заменяем исходное неравенство на другое попроще, без показательных функций, но имеющее абсолютно такие же корни, что и исходное. Сделаем это, воспользовавшись общим видом (*):

$$(5-1)((2x-3)-(x+4)) \geq 0; \qquad (**)$$

Пусть обилие скобок вас не смущает, я их поставил специально, чтобы выделить функции, стоящие в показателях степеней. Можно легко преобразовать:

$$4*(2x-3-x-4) \geq 0;$$

$$4*(x-7) \geq 0;$$

$$x \geq 7.$$

Мы решили неравенство. Можно просто запомнить формулу, но лучше понять, почему работает (*).

Чтобы во всем разобраться, нужно вспомнить, как решаются показательные неравенства. Первым делом приводим к одинаковому основанию: у нас в примере №7 слева и справа основание 5, поэтому с этим все хорошо. Дальше мы смотрим, больше ли основание единицы, если да, то просто вычеркиваем основание, сохраняем знак неравенства и сравниваем степени. А если меньше, то не забываем поменять знак неравенства на противоположный.

В нашем примере основание $5 > 1$ поэтому решение всего неравенства сводится к решению $2x - 3 \geq x + 4$. Обратите внимание на (**): оно представляет из себя произведение двух скобок $(5 - 1)$ и $((2x - 3) - (x + 4))$, а произведение будет больше нуля когда? Когда множители либо оба положительны, либо оба отрицательны.

Так как очевидно $(5 - 1) > 0$, то второй множитель $((2x - 3) - (x + 4))$ тоже должен быть больше нуля, чтобы все неравенство было верным. Или, другими словами, должно выполняться: $2x - 3 \geq x + 4$, что то же самое, если бы мы решали без всякой рационализации. Можно вообще все показательные неравенства решать рационализацией. Она дает вам право не обращать внимания на основание (больше или меньше единицы). Посмотрим еще простой пример:

Пример 8

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x-4};$$

Сразу по формуле (*) применим метод рационализации:

$$(\frac{1}{2} - 1)((x + 2) - (-2x - 4)) \geq 0;$$

Опять две скобки, но в этот раз первая скобка будет отрицательная $\frac{1}{2} - 1 < 0$, а значит для того, чтобы все произведение было больше равно нуля, вторая скобка $(x + 2) - (-2x - 4)$ тоже должна быть меньше равна нуля. Или, другими словами, должно выполняться $x + 2 \leq -2x - 4$.

Это все эквивалентно обычному методу решения показательных неравенств с избавлением от основания. Здесь основания слева и справа одинаковые и меньше единицы, значит вычеркиваем их и меняем знак неравенства: $x + 2 \leq -2x - 4$. В методе рационализации у нас тоже все свелось к точно такому же неравенству.

Примеры №7 и 8 обычно не решают методом рационализации. Давайте разберем пример, в котором рационализация сильно упрощает решение:

Пример 9

$$(x + 2)^{3-7x} \geq (x + 2)^{6-5x}$$

Обратите внимание, что здесь уже появляется ОДЗ, так как показательная функция определена только для положительного основания.
ОДЗ:

$$x + 2 > 0;$$

$$x > -2;$$

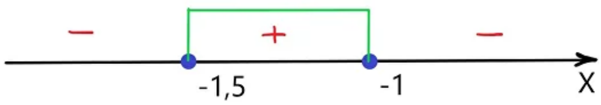
Следим, чтобы основание показательной функции было одинаково слева и справа. У нас все так. Вот только теперь мы не знаем, основание больше единицы или меньше, ведь при различных значениях x может быть и так, и так. Можно, конечно, рассмотреть два случая: когда основание больше единицы и когда меньше. Но придется решать две системы, а это долго. Воспользуемся методом рационализации по формуле (*), аналогично, как мы делали примеры №7 и 8:

$$(x+2-1)((3-7x)-(6-5x)) \geq 0;$$

Раскроем скобки внутри скобок и приведем подобные слагаемые.

$$(x+1)(-2x-3) \geq 0;$$

Решим неравенство методом интервалов:



Метод интервалов

Получаем, что $x \in [-\frac{3}{2}; -1]$. Проверяем, чтобы все удовлетворяло ОДЗ. У нас весь промежуток подходит.

Ответ: $x \in [-\frac{3}{2}; -1]$.

Теперь разберем более общий случай применения метода рационализации. Дело в том, что часто встречаются смешанные неравенства, и в них кроме показательной функции бывают логарифмические, тригонометрические, линейные и т.д. В общем, намешана вся школьная программа. В таких случаях нам тоже может помочь рационализация.