2 Определение 1

Простейшее показательное уравнение представляет собой уравнение вида:

$a^x = b$, , где $a > 0$, $a \neq$

В процессе изучения темы решения показательных уравнений полезно оперировать свойствами степеней:

1. Умножение степеней: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}; a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

2. Деление степеней: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

3. Возведение степени в степень: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Виды показательных уравнений, способы их решения

Классификация показательных уравнений:

- простейшие, к примеру, $3^x = 9$;
- уравнения, которые сводят к простейшим путем применения свойств степени, например, $2^x \times 3^x = 36$;
- вынесение общей степени, $5^{x+1} - 5^x = 20$;
- сведение к квадратному уравнению, как $25^x - 6 \times 5^x + 5 = 0$;
- однородные, например, $36^x - 2 \times 30^x + 25^x = 0$.

Существует несколько основных подходов к решению показательных уравнений:

1. Привести выражение к единому знаменателю.
2. Привести уравнение к общему показателю степени.
3. Заменить переменную.
4. Упростить выражение и воспользоваться одним из представленных методов.

Вынесение общего множителя за скобки и группировка слагаемых

С подобным методом решения приходилось встречаться в процессе прохождения темы многочленов. Предположим, что имеется некое выражение:

$$a^2+3a-b^2-3b$$

Выполним группировку слагаемых, исходя из того, что выражения 1 и 3 являются разностью квадратов, а выражения 2 и 4 обладают общим множителем в виде числа 3:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$3a-3b=3(a-b)$$

После преобразований начальное выражение примет вид:

$$(a-b)(a+b)+\sim 3(a-b)$$

Вынесем общий множитель:

$$(a-b)(a+b+3)$$

В результате:

$$a^2+3a-b^2-3b=(a-b)(a+b+3)$$

Руководствуясь данной системой можно решать стандартные показательные уравнения. Рассмотрим пример:

Руководствуясь данной системой можно решать стандартные показательные уравнения. Рассмотрим пример:

$$7^{x+2}+4\cdot 7^{x-1}=347$$

Вынесем за скобки 7^{x-1}:

$$7^{x-1}(7^3+4)=347$$

Вычислим выражение, заключенное в скобки:

$$7^3+4=347$$

Тогда:

$$7^{x-1}=1=7^0$$

x = 1

Решим следующий пример:

$$5^{2x}-4^{x+1}=4^x+5^{2x-1}$$

Заметим, что в данном случае общее основание отсутствует. Попробуем перенести в разные стороны числа 4 и 5:

$$5^{2x}-5^{2x-1}=4^x+4^{x+1}$$

Далее следует вынести за скобки общий множитель:

$$5^{2x}(1-\frac{1}{5})=4^x(1+4)$$

Заметим, что:

$5^{2x} = 25^x$

Выполним преобразования таким образом, чтобы в левой части находилась переменная, а в правой — оставшиеся компоненты. В первую очередь следует разделить все части выражения на 4^x, что позволит исключить степень в правой части. На втором шаге потребуется разделить обе части уравнения на $(1 - \frac{1}{5})$, , чтобы убрать числовой множитель с левой стороны:

$$\frac{25^x}{4^x} = \frac{5}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{\frac{4}{5}} = 5 \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$$

Так как в левой части имеется выражение:

$$\frac{25^x}{4^x} = \left(\frac{25}{4}\right)^x,$$

а справа находится только $\frac{25}{4}$, можно заключить, что:

x = 1

Решение показательных уравнений не всегда нужно расписывать детально. Можно ограничиться краткой записью. Например, решим уравнение:

$$2^{x^2 - 1} - 3^{x^2} = 3^{x^2 - 1} - 2^{x^2 + 2}$$

$$2^{x^2-1}+2^{x^2+2}=3^{x^2-1}+3^{x^2}$$

$$2^{x^2-1}(1+8)=3^{x^2-1}(1+3)$$

$$9\cdot 2^{x^2-1}=4\cdot 3^{x^2-1}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1}\cdot\frac{9}{4}=1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3}=1$$

$$x^2-3=0$$

$$x_1=\sqrt{3},x_2=-\sqrt{3}$$

Приведение к одинаковому основанию

В большинстве заданий встречаются уравнения, записанные в виде:

$$a^x=b$$

В таком случае решение заключается в трансформации **b** в некую степень числа **a**. Сложность заключается в поиске общего множителя для данных чисел. В процессе потребуется воспользоваться правилом.

Правило 1

Когда основания одинаковые, а показатели степени — нет, умножение чисел предполагает сложение их степеней, а деление чисел сопровождается вычитанием их степеней.

В качестве примера можно рассмотреть уравнение:

$$(\frac{1}{64^2})^{-x}=\sqrt{\frac{1}{8}}$$

Известно, что 64 и 8 обладают общим множителем, роль которого играет число 2.

$$64^2 = 2^{12}$$

$$8 = 2^3$$

Тогда:

$$(\frac{1}{2^{12}})^{-x} = \sqrt{\frac{1}{2^3}}$$

$$\frac{1}{2^{-12x}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$$

$$(\frac{1}{2})^{-12x} = (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$$

$$-12x = \frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{1}{8}$$

В следующем задании необходимо выполнить преобразования для каждой составляющей показательного уравнения:

$$(0,5)^{x^2} \times 4^{x+1} = 64^{-1}$$

Определим общее основание:

$$0,5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$$4 = 2^2$$

$4 = 2^2$

$64 = 2^6$

Таким образом:

$(2^{-1})^{x^2} \times (2^2)^{x+1} = (2^6)^{-1}$

$2^{-x^2} \times 2^{2x+2} = 2^{-6}$

$2^{-x^2 2x+2} = 2^{-6}$

$-x^2 + 2x + 2 = -6$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

В данном случае уравнение имеет пару корней: -2 и 4

Приведение к одинаковой степени

Ранее рассмотренный метод не всегда подходит для решения показательных уравнений, имеющих неодинаковые основания. В некоторых случаях целесообразно выполнять преобразования показателей степени. Данная методика применима в задачах, содержащих операции умножения или деления.

Правило 2

Умножать числа, которые обладают неодинаковыми основаниями, но схожи показателями степени, следует путем умножения лишь оснований, а степень при этом не меняется: $a^x b^x = (ab)^x$.

Разберем этот метод решения на конкретном примере:

$5^{2x-4} = 49^{2-x}$

Заметим, что слева и справа отсутствуют общие множители, что мешает их приведению к общему основанию. Попробуем выполнить арифметические преобразования для показателей степени:

$5^{2x-4} = 49^{2-x}$

$5^{2x-4} = 7^{4-2x}$

$5^{2x-4} = \frac{1}{7}^{2x-4}$

$35^{2x-4} = 1$

$2x-4 = 0$

$x = 2$

Закрепим алгоритм действий на другом примере:

$2^{x-2} = 5^{2-x}$

В данном случае необходимо привести все части выражения к одинаковым показателям степени. В первую очередь следует выполнить преобразования справа, руководствуясь свойством степенных функций:

$2^{x-2} = \frac{1}{5}^{x-2}$

Далее выполним умножение обеих частей уравнения на 5^{x-2}:

$2^{x-2} \times 5^{x-2} = 1$

$10^{x-2} = 1$

$10^{x-2} = 10^0$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

Выделение устойчивого выражения

Перед этим были рассмотрены способы решения показательных уравнений, которые заключаются в разложении многочленов на множители. В результате получались аналогичные основания или была выделена переменная для дальнейшей замены. При вынесении определенного множителя за скобку или замене переменной с целью упростить выражение выполняется действие, представляющее собой выделение устойчивого выражения.

Определение 2

Устойчивым выражением является некий многочлен с переменной, который скрыт во всех показательных функциях уравнения. Такой многочлен допустимо выносить за скобки, либо обозначить в виде новой переменной для упрощения уравнения.

Смысл заключается в том, что устойчивое выражение содержится практически в каждом сложном уравнении. Трудности могут возникнуть при правильном определении данного выражения.

Разберем пример:

$3^{x+1} + 3^{x} - 3^{x-2} = 35$

Здесь устойчивым выражением является 3^{x-2} в виде степени с минимальным показателем. В результате:

$3^{x-2}(3^{3} + 3^{2} - 1) = 35$

$3^{x-2} \times 35 = 35$

$3^{x-2} = 1$

В связи с тем, что единица является результатом возведения любого числа в нулевую степень, запишем:

$3^{x-2}=3^{0}$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

Потренироваться можно еще на одном примере:

$5\times3^{-3x+1}+3^{-3x+2}=24$

Выполним преобразования слева, чтобы получилась одинаковая степень:

$3^{-3x+1}=3^{-3x+1+1}=3\times3^{-3x+1}$

В результате получено устойчивое выражение 3^{-3x+1}. Данное выражение следует вынести за скобки. В итоге уравнение значительно упрощается:

$3^{-3x+1}(5+3)=24$

$8\times3^{-3x+1}=24$

$3^{-3x+1}=3^{1}$

$-3x + 1 = 1$

$x = 0$

Замена переменной

Данный способ позволяет решать сложные показательные уравнения. Смысл методики заключается во

Данный способ позволяет решать сложные показательные уравнения. Смысл методики заключается во введении такой замены переменной, при которой исходное выражение трансформируется в более простое. При этом данная возможность не всегда является очевидной. В конце решения необходимо выполнить обратную замену.

Разберем несложный пример, чтобы проиллюстрировать способ замены переменной:

$$4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$$

Заметим, что:

$$4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$$

В таком случае:

$$(2^x)^2 + 2^{x+1} - 3 = 0$$

Выполним преобразования:

$$2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$$

Теперь очевидно, что требуется следующая замена:

$$t = 2^x$$

В результате исходное выражение примет вид:

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

Корни уравнения:

$t_1 = -3,\ t_2 = 1$

На следующем шаге необходимо выполнить обратную замену с учетом только положительных корней:

$t_2 = 1$

В результате:

$2^x = 1$

$x = 0$

Простая замена поможет решить и такую задачу:

$3^{3x+1} - 4 \cdot 9^x = 17 \cdot 3^x - 6$

В данном случае рекомендуется сначала преобразовать уравнение:

$3^{3x+1} = 3 \cdot (3^x)^3, 9^x = (3^x)^2$

Далее можно перейти к очевидной замене $t = 3^x$:

$3t^3 - 4t^2 = 17t - 63t^3 - 4t^2 - 17t + 6 = 0$

Попробуем подобрать корень уравнения. Заметим, что t = 1 не подходит. Если применить t = 3, то получим:

$t = 3:\ 3 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 = 17 \cdot 3 - 6$

Слева получится выражение:

81 - 36 = 45

Справа увидим следующее:

51 - 6 = 45

Можно сделать вывод, что первый корень был подобран правильно. Зная, что при a в виде корня многочлена P(x), P(x) можно поделить без остатка на x - a Применительно к этой задаче, $3t^3-4t^2-17t+6$ можно поделить на выражение (t-3) без остатка.

Определим, какой многочлен следует умножить на выражение (t-3) для получения $3t^3+\dots$. Этим многочленом является $3t^2$. В результате:

$$3t^2(t-3)=3t^3-9t^2$$

Полученное выражение нужно вычесть из $3t^3-4t^2-17t+6$. Тогда:

$$3t^3-4t^2-17t+6-(3t^3-9t^2)=5t^2-17t+6$$

Далее выясним, на что необходимо умножить выражение(t-3) для получения $5t^2+\dots$. Очевидно, что умножать следует на 5t. В результате:

$$5t(t-3)=5t^2-15t$$

Полученное выражение следует отнять из оставшегося:

$$5t^2-17t+6-(5t^2-15t)=-2t+6$$

Умножим (t-3) на -2, а результат отнимем от оставшегося выражения:

$$-2t+6-3(t-3)=0$$

В частном осталось:

$$3t^2+5t-2$$

В итоге многочлен разложен таким образом:

$$3t^3-4t^2-17t+6=(t-3)(3t^2+5t-2).$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$3t^2+5t-2=0$$

Его решениями являются:

$$t_2=\frac{1}{3},\ t_3=-2$$

В таком случае начальное выражение примет вид:

$$3t^3-4t^2-17t+6=0$$

В результате получаются три корня:

$$t_1 = 3,\ t_2 = \frac{1}{3},\ t_3 = -2$$

В связи с тем, что последний корень является отрицательным числом, его следует исключить. Выполнив обратную замену, получим два решения:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1$$

Решим пример, когда замена не столь очевидна, как в предыдущих уравнениях:

$$(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4$$

Здесь основания отличаются лишь знаком. Результат умножения данных оснований является разностью квадратов, равной единице:

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1$$

Определение 3

Сопряженные числа — такие числа **a** и **b**, произведение которых равно единице (a*b=1).

В этом примере основания являются сопряженными числами. Поэтому умножим все части уравнения на сопряженное число. Возьмем, например, $(2+\sqrt{3})^x$. Тогда левая часть примет вид:

$1+(2+\sqrt{3})^x$

Правая часть:

$-4\cdot(2+\sqrt{3})^x$

При замене : $t=(2+\sqrt{3})^x$, получим преобразованное начальное уравнение:

$t^2+1=4t$

Решениями данного уравнения являются:

$t_1=2+\sqrt{3}, t_2=2-\sqrt{3}$

Тогда:

$x_1=1$

Зная, что:

$2-\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^{-1}$

В результате:

$x_2=-1$

В итоге корнями уравнения являются : 1; -1

Подробные примеры с решением

Задача 1

Решить уравнение:

$$\frac{3^{2x+1}9^{x+2}}{27^{x}}=243$$

Решение

В данном случае целесообразно привести к меньшему основанию:

$$9^{x+2}=3^{2(x+2)}$$

$$27^{x}=3^{3x}$$

$$243=3^{5}$$

Преобразование начального уравнения:

$$\frac{3^{2x+1}3^{2(x+2)}}{3^{3x}}=3^{5}$$

При умножении чисел, обладающих одинаковыми основаниями, следует суммировать степени. В случае деления аналогичных чисел основания вычитаются. Тогда:

$$3^{2x+1+2(x+2)-3x}=3^{5}$$

После перехода от показательного уравнения к линейному можно найти корни:

$$2x+1+2(x+2)-3x=5$$

$$2x+1+2x+4-3x=5$$

x = 0

Ответ: x = 0

Задача 2

Найти корни уравнения:

$$4^{3x+1}625^{\frac{x}{2}} = 6400$$

Решение

Заметим, что здесь не получится преобразовать выражения слева, чтобы получить степень одинакового числа. Поэтому запишем числа, как произведения степеней, отличающиеся основаниями, но имеющие аналогичные показатели:

$$4^{3x+1} = 4 \cdot 4^{3x} = 4 \cdot 64^{x}$$

$$625^{\frac{x}{2}} = 25^{2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)} = 25^{x}$$

Слева получим:

$$4 \cdot 64^{x} 25^{x}$$

Перемножим числа, которые имеют разные основания и аналогичные показатели. При этом определяют произведение только оснований, а показатель оставляют без изменений:

$$a^{x} b^{x} = (ab)^{x}$$

В результате:

$$4 \cdot 64^{x} 25^{x} = 6400$$

$$4 \cdot (64 \cdot 25)^{x} = 6400$$

$$1600^{x} = \frac{6400}{4}$$

$1600^x = 1600$

x = 1

Ответ: x = 1

Задача 3

Требуется вычислить корни уравнения:

$$27 \cdot 3^{4x-9} - 9^{x+1} = 0$$

Решение

Выполним перенос слагаемого, которое имеет знак минуса, в правую часть:

$$27 \cdot 3^{4x-9} = 9^{x+1}$$

Перепишем выражение через степени 3:

$$3^3 \cdot 3^{4x-9} = 3^{2(x+1)}$$

После суммирования степеней в левой части получим равносильное уравнение:

$$3 + 4x - 9 = 2(x+1)$$

В результате:

x = 4

Ответ: x = 4

Задача 4

Решить уравнение:

$$2^{2x}3^{x}5^{x}-60^{4x-15}=0$$

Решение

Перенесем отрицательное слагаемое вправо:

$$2^{2x}3^{x}5^{x}=60^{4x-15}$$

Заметим, что в левой части образовалась «неправильная» степень у числа 2. Выполним преобразования:

$$2^{2x}=4^{x}$$

Так как в левой части неодинаковые основания, но аналогичные степени, можно выполнить умножение:

$$60^{x}=60^{4x-15}$$

В результате:

$$\sim x=5$$

Ответ: $\sim x=5$

Задача 5

Найти корни:

$$16^{x-9}=\frac{1}{2}$$

Решение

Воспользуемся свойством степени:

$$16=2^4,\ \frac{1}{2}=2^{-1}$$

В результате:

$$2^{4(x-9)}=2^{-1}$$

$$4(x-9)=-1$$

$$x=\frac{35}{4}$$

Ответ: $x=\frac{35}{4}$

Задача 6

Сумма накоплений составляет 1 млн руб. У собственника есть желание приумножить эту сумму и получить 1.5 млн руб. Банковское предложение заключается в 12% годовых при ежемесячной капитализации процентов. Требуется определить период вклада в месяцах для набора желаемой суммы.

Решение

Составим показательное уравнение. Для этого введем параметры:

Sn — сумма, имеющаяся изначально;

Sk — сумма, которая получится в итоге;

i — проценты по ставке;

x — число периодов.

Запишем уравнение:

$$Sk = Sn\left(1 + \frac{i}{100}\right)^x$$

Введем значения:

$$Sn = 1000000 = 10^6,$$

$$Sk = 1500000 = 1.5 \cdot 10^6,$$

$$\sim i = 1$$

В результате:

$$1.5 \cdot 10^6 = 10^6(1 + 0.01)^x$$

$$1.5 = 1.01^x$$

$$x \sim 40.7489$$

Ответ: чтобы получить 1.5 млн руб., требуется вложить 1 млн в банк на срок в 41 месяц.

Задача 7

Радиоактивный изотоп в процессе распада теряет массу, согласно закономерности:

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}},$$

где m_0 (мг) является исходной массой изотопа,

t (мин.) определяет время, прошедшее от начального момента,

T~ (мин.) представляет собой период полураспада.

Вначале изотоп весит m_0 = 50 мг. Период полураспада составляет $T = 5\sim$ мин.

Нужно определить время в минутах, которое потребуется, чтобы масса изотопа составила 12,5 мг.

Решение

Выполним подстановку всех характеристик из условия задачи в формулу, описывающую закономерность распада:

$$12.5 = 50 \cdot 2^{-\frac{t}{5}}$$

Разделим выражение на 50, получим:

$$0.25 = 2^{-\frac{t}{5}}$$

Получим в левой части:

$$0.25 = \frac{1}{4} = 2^{-2}$$

В результате можно записать равносильное уравнение:

$$-2 = -\frac{t}{5}$$

Таким образом:

t = 10 мин.

Ответ: 10 мин.