

Алгоритм решения неравенств с логарифмами

Кратко разберем общий алгоритм решения неравенств с логарифмами. Если хотите разобраться подробно, изучив все детали, листайте ниже.

В общем виде логарифмическое неравенство можно записать так:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x);$$

где $a > 0$, $a \neq 1$ - основание логарифма;

$f(x) > 0$, $g(x) > 0$ - какие-то выражения, зависящие от x .

Логарифмы слева и справа от знака неравенства должны быть с одинаковым основанием!

Только в этом случае можно избавиться от логарифмов и сравнить подлогарифмические функции.

При этом важно следить за основанием, если $a > 1$, просто вычеркнем логарифмы и получим неравенство:

$$f(x) > g(x);$$

Мы рассмотрели случай только при основании логарифма $a > 1$, а что будет, если $0 < a < 1$?

Оказывается, в этом случае мы тоже избавляемся от логарифмов, но при этом обязательно меняем знак неравенства на противоположный!

При $0 < a < 1$ неравенство будет выглядеть так:

$$f(x) < g(x);$$

Общая схема

Неравенство:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x);$$

Решение:

$$\text{Если } a > 1 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$\text{Если } 0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Как решать логарифмические неравенства?

Решение неравенств с логарифмами похоже на решение обычных логарифмических уравнений. Но есть несколько моментов, которые необходимо учитывать.

Для начала вспомним, что такое логарифм $\log_a b$ - это в какую степень нужно возвести число a , чтобы получить b . Например:

$$\log_3(27) = 3;$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(9) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = -2;$$

$$\log_2(\sqrt{2}) = \log_2(2^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2};$$

Кстати, число a (то, что внизу) называют основанием логарифма, а число b (то, что сверху) - аргументом.

Если у вас возникают сложности с вычислением логарифмов настоятельно рекомендую сначала почитать про логарифмы и их свойства.

Также важно помнить про ограничения, которые накладываются на логарифм $\log_a b$:

$$\begin{cases} b > 0, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Начнем изучение неравенств с небольшого примера:

$$\log_2 x > \log_2 4;$$

Сравниваются два логарифма с ОДИНАКОВЫМ основанием, значит вполне логично предположить, что $\log_2 x$ будет больше $\log_2 4$, при условии, что $x > 4$. Это и будет решением нашего простого неравенства.

Действительно, согласно определению логарифма, чем больше x , тем в бОльшую степень нужно возвести 2 — ку в основании логарифма, а значит, и тем больше будет сам логарифм. В качестве проверки подставим в неравенство $x = 16$ - число большее 4:

$$\log_2 16 > \log_2 4;$$

Посчитаем получившиеся логарифмы:

$$4 > 2;$$

Получили верное неравенство.

И подставляя любые числа, большие 4, вы всегда будете получать верное неравенство.

Некоторые логарифмы мы не можем посчитать, как, например $\log_2 15$, но логика сохраняется, если подставлять $x > 4$, неравенство будет верным. Кстати, калькулятор вам

любезно подскажет, что $\log_2 15 = 3,907 > \log_2 4$, что нас устраивает.

Ответ: $x > 4$.

Теперь рассмотрим другой пример:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x) > \log_{\frac{1}{2}}(4);$$

Обратите внимание, я поменял основания на $\frac{1}{2}$. Интересно, изменится ли логика рассуждений? Подставим $x = 16 > 4$:

$$\log_{\frac{1}{2}}(16) > \log_{\frac{1}{2}}(4);$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2^4) > \log_{\frac{1}{2}}(2^2);$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2};$$

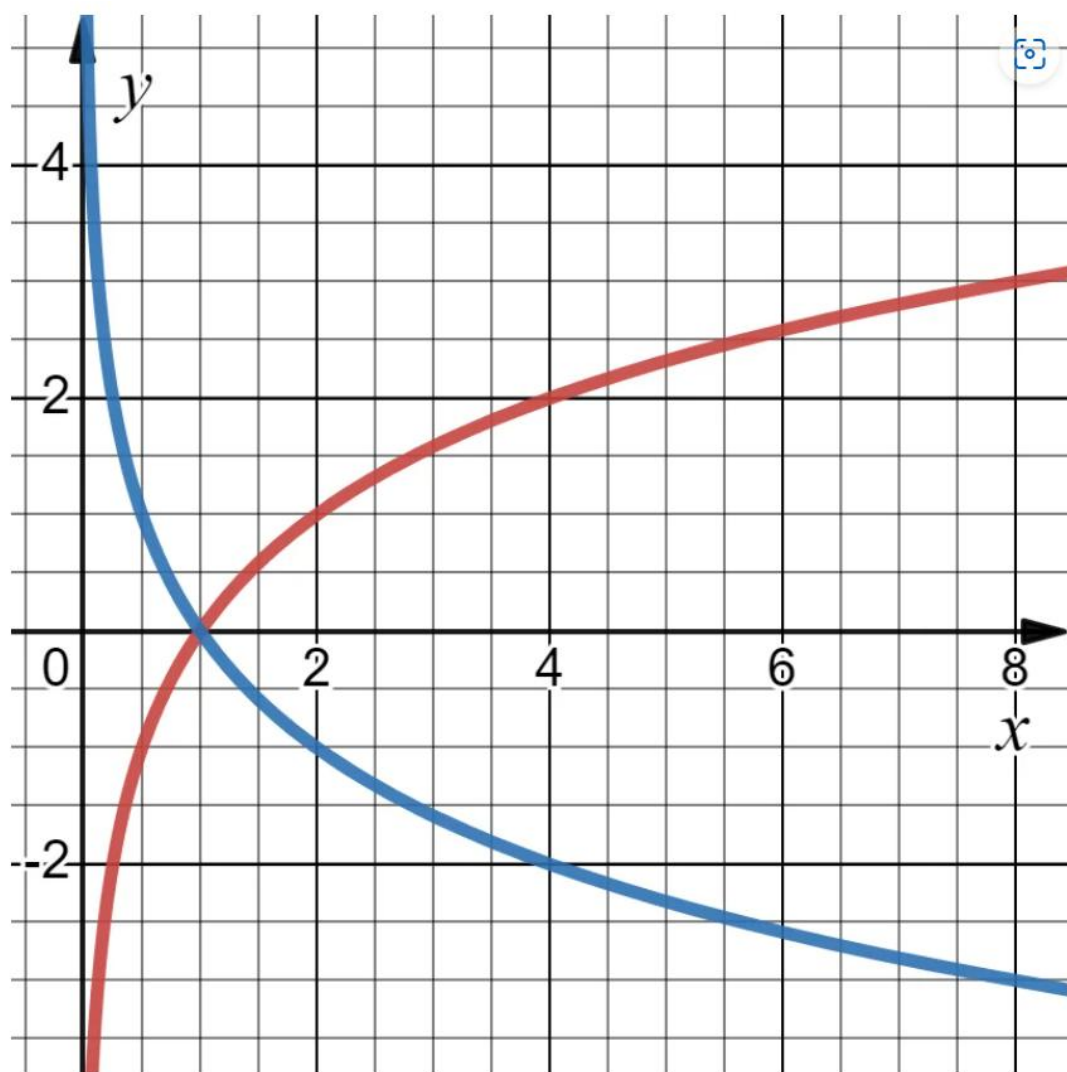
Посчитаем логарифмы слева и справа:

$$-4 > -2;$$

Опа! Получилось неверное неравенство! (-4) , конечно же, не больше (-2) . Мы подставили под левый логарифм число большее, чем у правого, но получили, что значение логарифма меньше. Другими словами, если основание логарифма будет меньше единицы, то чем БОЛЬШИЙ аргумент мы подставляем, тем меньший логарифм будем получать.

Оказывается, если основание у логарифма больше единицы, то логарифм будет возрастающей функцией: чем БОЛЬШЕ значение аргумента, тем БОЛЬШЕ сам логарифм. Если основание логарифма меньше единицы, то логарифм будет убывающей функцией: чем БОЛЬШЕ значение аргумента, тем МЕНЬШЕ значение логарифма.

Для примера на рисунке показан график логарифмов $\log_2(x)$ с основанием 2 (красным цветом) - возрастающая функция. И $\log_{\frac{1}{2}}(x)$ с основанием 0,5 - синим цветом (убывающая функция).



Красным показан график логарифма с основанием 2. Синим - логарифм с основанием 0.5

Тогда наш пример $\log_{\frac{1}{2}}(x) > \log_{\frac{1}{2}}(4)$ правильно будет решить так:

$$x < 4;$$

Поменяли знак неравенства!

Кроме этого, не стоит забывать про ограничения для логарифма (ОДЗ): логарифм от отрицательного числа не существует! А это значит, что $x > 0$.

Ответ: $x \in (0; 4)$.

Подведем итоги наших рассуждений. Для того, чтобы решить простое логарифмическое неравенство:

1. Необходимо привести логарифмы слева и справа к одинаковому основанию;
2. Вычеркнуть логарифмы;
3. Сохраняем знак неравенства, если основание больше единицы;
4. Меняем знак неравенства на противоположный, если основание меньше 1;
5. Внимательно следим за ОДЗ.

Разберем примеры с основным типами логарифмических неравенств.

Пример 1

$$\log_2(x) > 3;$$

Первым делом всегда записываем ОДЗ. Здесь оно достаточно простое:

$$x > 0;$$

Следующий шаг - сделать так, чтобы слева и справа стояли логарифмы с одинаковым основанием. Для этого представим число 3 в виде логарифма с основанием 2 по формуле,

позволяющей представить любое число a в виде логарифма с нужным нам основанием b :

$$a = \log_b(b^a);$$

$$3 = \log_2(2^3);$$

Подставим преобразования в исходное уравнение вместо тройки:

$$\log_2(x) > \log_2(2^3);$$

Теперь у нас логарифмы с одинаковым основанием. Смотрим на это основание: $2 > 1$, значит просто избавляемся от логарифмов, оставляя знак неравенства прежним:

$$x > 2^3;$$

$$x > 8;$$

Вспоминаем про найденный в начале примера ОДЗ и проверяем, чтобы все корни подходили.

Это удобно сделать, отметив на оси x решение уравнения: $x > 8$; и ОДЗ: $x > 0$.



Метод интервалов

Находим пересечение указанных областей. И видим, что все $x > 8$ удовлетворяют ОДЗ, записываем ответ.

Ответ: $x > 8$.

Пример 2

$$\log_3(x + 3) > \log_3(2x - 4);$$

Любой пример начинаем с ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 3 > 0, \\ 2x - 4 > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -3, \\ x > 2. \end{cases}$$

В итоге, ОДЗ получается $x > 2$. Теперь приступаем к решению самого неравенства. Слева и справа стоят логарифмы с одинаковыми основаниями большими единицы. Значит просто избавляемся от логарифмов:

$$x + 3 > 2x - 4;$$

$$x - 2x > -4 - 3;$$

$$-x > -7;$$

$$x < 7.$$

Сверяем с ОДЗ ($x > 2$), получается $x \in (2; 7)$.

Ответ: $x \in (2; 7)$.

В примере 2 был важный момент в ОДЗ, на который стоит отдельно обратить внимание. Мы накладывали условия, что оба выражения под логарифмами должны быть больше нуля:

$$\begin{cases} x + 3 > 0, \\ 2x - 4 > 0. \end{cases}$$

Но на самом деле, в этом случае в ОДЗ можно рассмотреть только $2x - 4 > 0$. А условие $x + 3 > 0$ необязательно! Это следует из простой логики, что если $2x - 4 > 0$, то $x + 3 > 0$ выполняется автоматически, так как решение примера после того, как избавляемся от

логарифмов, сводится к неравенству:

$$x + 3 > 2x - 4.$$

А раз $2x - 4 > 0$, то и $x + 3 > 0$:

$$x + 3 > 2x - 4 > 0.$$

Конкретно в этом примере это не критично, но дальше, когда будут гораздо более сложные примеры, решение дополнительных неравенств в ОДЗ может существенно усложнить жизнь.

Особенно это касается **заданий с параметром**. Настоятельно рекомендую думать, а не накладывать ОДЗ на все подряд.

Пример 3

$$\log_{0,1}(x^2 - x - 2) > \log_{0,1}(3 - x);$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ 3 - x > 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы решить первое неравенство в ОДЗ, необходим метод интервалов. Через дискриминант или по теореме Виета (как кому удобно) находим корни квадратного многочлена:

$$D = 1 - 4 * (-2) = 9;$$

$$x_1 = \frac{1 + 3}{2} = 2;$$

$$x_2 = \frac{1 - 3}{2} = -1;$$

Раскладываем квадратный многочлен на множители по формуле:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

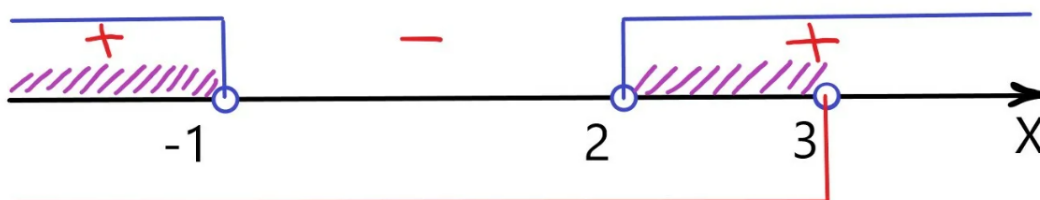
$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1);$$

$$(x - 2)(x + 1) > 0;$$

ОДЗ принимает вид:

$$\begin{cases} (x - 2)(x + 1) > 0, \\ x < 3. \end{cases}$$

Рисуем ось x , расставляем знаки для первого неравенства, отмечаем подходящие промежутки и на этой же оси отмечаем решение второго неравенства в ОДЗ:



Находим ОДЗ как пересечение промежутков, то есть те значения x , которые удовлетворяют одновременно обоим неравенствам:

$$x \in (-\infty; -1) \cup (2; 3);$$

После нахождения ОДЗ возвращаемся к решению неравенства:

$$\log_{0,1}(x^2 - x - 2) > \log_{0,1}(3 - x);$$

Имеем два логарифма с одинаковыми основаниями, но эти основания меньше 1! Значит необходимо изменить знак неравенства на противоположный при вычеркивании логарифмов:

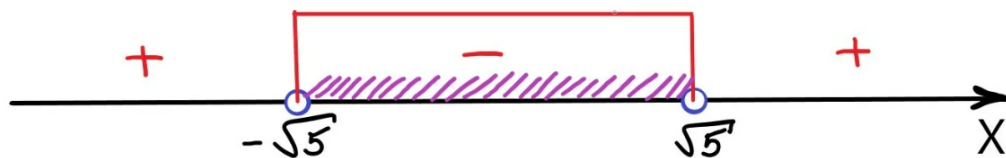
$$x^2 - x - 2 < 3 - x;$$

Получили обыкновенное квадратное неравенство. Просто переносим все налево, приводим подобные слагаемые, раскладываем на множители по формуле разности квадратов и решаем

при помощи метода интервалов.

$$x^2 - 5 < 0;$$

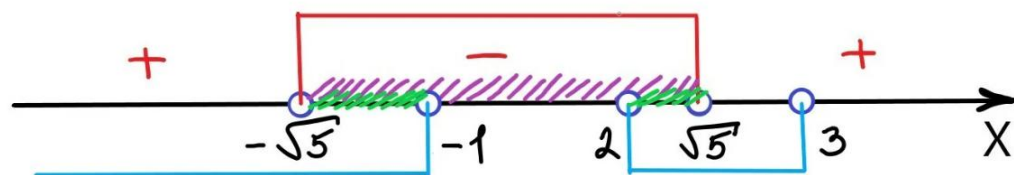
$$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) < 0;$$



Метод интервалов

$$x \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5});$$

С учетом ОДЗ ($x \in (-\infty; -1) \cup (2; 3)$) получаем:



Метод интервалов

Голубым цветом отмечено ОДЗ, а зеленым - ответ.

Ответ: $x \in (-\sqrt{5}; -1) \cup (2; \sqrt{5})$.

Рассмотрим пример, когда основания у логарифмов разные.

Пример 4

$$2\log_9(4x^2 + 1) \geq \log_3(3x^2 + 4x + 1)$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 4x^2 + 1 > 0, \\ 3x^2 + 4x + 1 > 0. \end{cases}$$

Первое неравенство выполняется автоматически по той простой причине, что его левая часть - это сумма двух неотрицательных слагаемых, а она всегда больше 0. Поэтому наше ОДЗ сводится к:

$$3x^2 + 4x + 1 > 0;$$

$$3(x + 1)(x + \frac{1}{3}) > 0;$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty);$$

Теперь решим само логарифмическое неравенство:

$$2\log_9(4x^2 + 1) \geq \log_3(3x^2 + 4x + 1)$$

Первое, на что мы обращаем внимание, что у логарифмов разные основания, а кроме этого, перед левым логарифмом стоит множитель 2. С обеими этими проблемами нужно разобраться. Для этого понадобится формула вынесения степени из основания логарифма:

$$\log_{a^n}(b) = \frac{1}{n}\log_a(b);$$

$$\begin{aligned} \log_9(4x^2 + 1) &= \log_{3^2}(4x^2 + 1) = \\ &= \frac{1}{2}\log_3(4x^2 + 1); \end{aligned}$$

Подставим преобразования в наше неравенство:

$$2 * \frac{1}{2} \log_3(4x^2 + 1) \geq \log_3(3x^2 + 4x + 1)$$

$$\log_3(4x^2 + 1) \geq \log_3(3x^2 + 4x + 1)$$

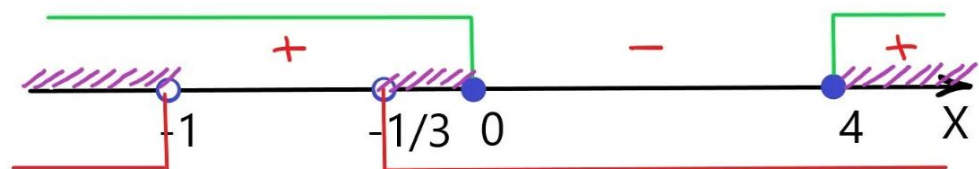
Все очень удачно преобразовалось: исчез множитель перед логарифмом, и основания слева и справа стали одинаковыми. Так как основание больше единицы, то просто вычеркиваем логарифмы, оставляя знак неравенства:

$$4x^2 + 1 \geq 3x^2 + 4x + 1;$$

$$x^2 - 4x \geq 0;$$

$$x(x - 4) \geq 0;$$

Метод интервалов:



Метод интервалов

С учетом ОДЗ получаем:

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 0] \cup [4; +\infty)$$

Метод замены переменной в неравенствах с логарифмом

Еще один очень популярный тип неравенств - это неравенства, которые решаются при помощи замены переменной. Как всегда, проще разобраться с этим на примерах:

Пример 5

$$\log_3^2(x) + 2 > 3 \log_3(x);$$

Сперва найдем ОДЗ, здесь оно крайне простое:

$$x > 0.$$

Очень легкий пример, который решается при помощи замены. Действительно, обратите внимание, что логарифмы в неравенстве абсолютно одинаковые. Заменим их на какую-нибудь переменную t :

$$\text{Пусть } t = \log_3(x)$$

Тогда неравенство примет вид:

$$t^2 + 2 > 3t;$$

$$t^2 - 3t + 2 > 0;$$

Получили обыкновенное квадратное неравенство, только относительно переменной не x , а t .

Находим корни t , раскладываем на множители и решаем методом интервалов:

$$(t - 1)(t - 2) > 0;$$

$$t \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty);$$

То же самое можно переписать в виде совокупности неравенств, смысл остается такой же:

$$\begin{cases} t < 1, \\ t > 2. \end{cases}$$

Не путайте совокупность и систему! Знак системы используется, когда нужно найти значения x , удовлетворяющие **ОДНОВРЕМЕННО** всем неравенствам, входящим в систему.

А знак совокупности используется, когда нужно объединить решение каждого неравенства - то есть решением совокупности будут все корни, полученные в каждом неравенстве по отдельности.

В данном примере мы используем совокупность, так как нас устраивают и $t < 1$, и $t > 2$. И то, и то является решением нашего неравенства.

Понимание разницы между совокупностью и системой - принципиальный момент при решении логарифмических и **показательных неравенств**. С совокупностью мы

познакомились в этом примере, а когда используется система, поговорим чуть позже.

Итак, у нас совокупность из двух неравенств относительно переменной t . Время сделать обратную замену: вместо t подставляем выражение, на которое мы его заменяли. Напоминаю $t = \log_3(x)$:

$$\begin{cases} \log_3(x) < 1, \\ \log_3(x) > 2. \end{cases}$$

Ну вот, перед нами два простеньких логарифмических неравенства, которые мы уже научились решать выше:

$$\log_3(x) < 1;$$

$$\log_3(x) < \log_3(3);$$

$$x < 3.$$

$$\log_3(x) > 2;$$

$$\log_3(x) > \log_3(3^2);$$

$$x > 9.$$

С учетом ОДЗ ($x > 0$), и не забыв про совокупность, получаем:

Ответ: $x \in (0; 3) \cup (9; +\infty)$.

Пример 6

$$\frac{\log_4(64x)}{\log_4(x) - 3} + \frac{\log_4(x) - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4(x^4) + 16}{\log_4^2(x) - 9}.$$

Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_4(x) - 3 \neq 0, \\ \log_4(64x) \neq 0, \\ \log_4^2(x) - 9 \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_4(x) \neq \log_4(4^3), \\ \log_4(64x) \neq \log_4(4^0), \\ (\log_4(x) - 3)(\log_4(x) + 3) \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_4(x) \neq \log_4(4^3), \\ \log_4(64x) \neq \log_4(4^0), \\ \log_4(x) \neq \log_4(4^{-3}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 64, \\ x \neq \frac{1}{64}. \end{cases}$$

В итоге, ОДЗ получается: $x \in (0; \frac{1}{64}) \cup (\frac{1}{64}; 64) \cup (64; +\infty)$

Главное помнить про правило: мы должны стараться сделать так, чтобы все логарифмы были с одинаковым основанием, и, по возможности, привести их к одинаковым аргументам. Здесь у каждого логарифма основание 4 - с этим тут все в порядке. А вот подлогарифмические функции постараемся сделать одинаковыми, воспользовавшись свойствами логарифмов. А именно, нам понадобятся следующие формулы:

$$a = \log_b(b^a);$$

$$\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c);$$

$$\log_a(b^n) = n * \log_a(b);$$

Воспользуемся ими для преобразования логарифмов в неравенстве:

$$\log_4(64x) = \log_4(64) + \log_4(x);$$

$$\log_4(x^4) = 4 \log_4(x);$$

Подставим в исходное неравенство:

$$\frac{\log_4(64) + \log_4(x)}{\log_4(x) - 3} + \frac{\log_4(x) - 3}{\log_4(64) + \log_4(x)} \geq \frac{4 * \log_4(x) + 16}{\log_4^2(x) - 9};$$

Заметим, что $\log_4(64) = 3$

$$\frac{3 + \log_4(x)}{\log_4(x) - 3} + \frac{\log_4(x) - 3}{3 + \log_4(x)} \geq \frac{4 * \log_4(x) + 16}{\log_4^2(x) - 9};$$

Теперь у нас везде одинаковые логарифмы, можно сделать замену. Пусть $t = \log_4(x)$:

$$\frac{3 + t}{t - 3} + \frac{t - 3}{3 + t} \geq \frac{4 * t + 16}{t^2 - 9};$$

Получилось обыкновенное неравенство из 9-го класса, которое решается методом

интервалов. Для этого перекинем все налево, приведем к общему знаменателю, приведем подобные и разложим на множители:

$$\frac{3+t}{t-3} + \frac{t-3}{3+t} \geq \frac{4*t+16}{(t-3)(t+3)};$$

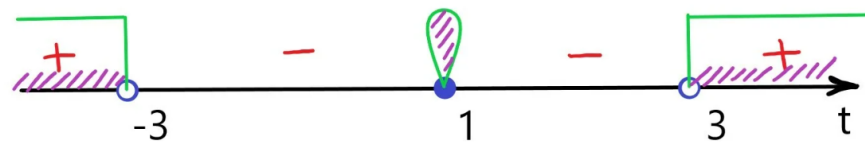
$$\frac{(3+t)(t+3)}{(t-3)(t+3)} + \frac{(t-3)(t-3)}{(t+3)(t-3)} - \frac{4*t+16}{(t-3)(t+3)} \geq 0;$$

$$\frac{9+6t+t^2+t^2-6t+9-4t-16}{(t-3)(t+3)} \geq 0;$$

$$\frac{2*t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)} \geq 0;$$

$$\frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t+3)} \geq 0;$$

Воспользуемся методом интервалов, для этого нарисуем ось x и расставим знаки:



Метод интервалов

Обратите внимание, на точку $t = 1$, она нас устраивает, ведь при этом значении t все выражение равно нулю. В ЕГЭ очень часто попадают отдельные точки, про которые надо не забыть.

$$\begin{cases} t < -3, \\ t = 1, \\ t > 3. \end{cases}$$

Сделаем обратную замену $t = \log_4(x)$:

$$\begin{cases} \log_4(x) < -3, \\ \log_4(x) = 1, \\ \log_4(x) > 3. \end{cases}$$

Решаем получившиеся простенькие логарифмические неравенства и, неожиданно, одно уравнение. Обратите внимание, что мы решаем опять не систему, а совокупность. Нас устраивают все решения, полученные в каждом уравнении\неравенстве по отдельности.

$$\log_4(x) < \log_4(4^{-3});$$

$$x < 4^{-3};$$

$$x < \frac{1}{64}.$$

$$\log_4(x) = 1;$$

$$\log_4(x) = \log_4(4^1);$$

$$x = 4.$$

$$\log_4(x) > 3;$$

$$\log_4(x) > \log_4(4^3);$$

$$x > 64.$$

С учетом ОДЗ записываем ответ:

$$\text{Ответ: } x \in (0; \frac{1}{64}) \cup [1] \cup (64; +\infty).$$

С основными стандартными типами логарифмических неравенств мы познакомились.

Теперь обсудим «подводные камни», которые часто встречаются при решении

логарифмических неравенств.

ОДЗ в логарифмических неравенствах. Как сделать проще?

Иногда можно немного упростить себе жизнь при поиске ОДЗ в неравенствах. Для этого нам понадобится немного логики. Разберем на примере:

Пример 7

$$1 + \log_6(4 - x) \leq \log_6(16 - x^2).$$

Выпишем ОДЗ, но не будем его решать - да, так можно делать!

ОДЗ:

$$\begin{cases} 4 - x > 0, \\ 16 - x^2 > 0. \end{cases}$$

ОДЗ выписали, теперь преобразуем исходное неравенство. Для этого 1 представим в виде логарифма с основанием 6: $1 = \log_6(6)$. И воспользуемся формулой:

$$\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c);$$

$$\log_6(6) + \log_6(4 - x) \leq \log_6(16 - x^2);$$

$$\log_6(6 * (4 - x)) \leq \log_6(16 - x^2);$$

Сравниваются два логарифма с одинаковым основанием, можем смело избавляться от логарифмов, сохраняя знак неравенства:

$$6 * (4 - x) \leq 16 - x^2;$$

И вот здесь остановимся и поговорим.

Согласно ОДЗ

$$\begin{cases} 4 - x > 0, \\ 16 - x^2 > 0. \end{cases}$$

Обратите внимание! Что, если: $6 * (4 - x) \geq 0$, то и $16 - x^2$ будет больше 0 автоматически, так как мы решаем неравенство:

$$6 * (4 - x) \leq 16 - x^2;$$

$$0 \leq 6 * (4 - x) \leq 16 - x^2;$$

Для нас это означает радостную новость: оказывается, необязательно решать все ОДЗ. В данном примере достаточно соблюдать условие $6 * (4 - x) \geq 0$, а все остальное ОДЗ будет выполняться автоматически, исходя из логики примера. Таким образом, наш пример сводится к решению системы:

$$\begin{cases} 6 * (4 - x) \leq 16 - x^2, \\ 6 * (4 - x) > 0. \end{cases}$$

Что избавляет нас от необходимости решать $16 - x^2 > 0$, это будет лишним действием. Конкретно в этом примере нет большой трудности решить все условия из ОДЗ и не думать. Но часто встречаются примеры, в которых выше представленная логика поможет вам не запутаться, ведь иногда это спасает от необходимости решения очень сложных неравенств. Особенно это касается решения **заданий с параметрами** в профильном ЕГЭ по математике. Вот там каждое лишнее условие в разы увеличивает объем работы.

Дорешаем пример:

$$\begin{cases} 6 * (4 - x) \leq 16 - x^2, \\ 6 * (4 - x) > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24 - 6x \leq 16 - x^2, \\ 4 - x > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 \leq 0, \\ x > 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 4, \\ 4 - x > 0. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [2; 4)$.

Запишем эти правила в общем виде:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x);$$

Эквивалентно

При $a > 1$:

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

При $0 < a < 1$:

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Неравенства с логарифмами по переменному основанию

Что, если в основании логарифма будет стоять не положительное число, а некоторое выражение, зависящее от x — $\log_{g(x)} f(x)$? Такие логарифмы называются логарифмами с переменным основанием.

Разберемся, как решать, на примере:

Пример 8

$$\log_{\frac{x}{3}}(3x^2 - 2x + 1) \geq 0;$$

Начнем решение с ОДЗ. Обратите внимание, что условия накладываются еще и на основание логарифма - оно должно быть больше нуля и не равно единице:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 > 0; , \\ \frac{x}{3} > 0; , \\ \frac{x}{3} \neq 1. \end{cases}$$

Заметим, что данный квадратный многочлен больше нуля при любых значениях x . Второе неравенство имеет решения при $x > 0$. А третье дает нам $x \neq 3$.

Объединяя все решения, получаем итоговое ОДЗ:

$$x \in (0; 3) \cup (3; +\infty);$$

Приступим к решению.

Мы знаем, чтобы решить исходное неравенство, нужно представить 0 справа в виде логарифма с таким же основанием. Но проблема в том, что основание логарифма слева не число, а выражение, зависящее от x . Нас не должно это смущать, продолжаем решать точно так же, как если бы в основании было число, то есть, приводим к одинаковому основанию:

$$\log_{\frac{x}{3}}(3x^2 - 2x + 1) \geq \log_{\frac{x}{3}}\left(\frac{x}{3}\right)^0;$$

$$\log_{\frac{x}{3}}(3x^2 - 2x + 1) \geq \log_{\frac{x}{3}}(1);$$

Получилось, что сравниваются два логарифма с одинаковым основанием. Вот только это основание может быть совершенно любым. Это важно, если вспомнить, как решать классические логарифмические неравенства: знак неравенства должен меняться, если в основании логарифмов стоит число от нуля до единицы, и оставаться таким же, если основание больше единицы. У нас в основании стоит $\frac{x}{3}$ - выражение, зависящее от x . Оно может принимать значения как больше единицы, так и меньше. Поэтому логично было бы рассмотреть два случая: когда основание больше 1, и когда от 0 до 1.

Рассмотрим первый случай:

$$\frac{x}{3} > 1;$$

$$\frac{x}{3} - 1 > 0;$$

$$\frac{x - 3}{3} > 0;$$

$$x > 3.$$

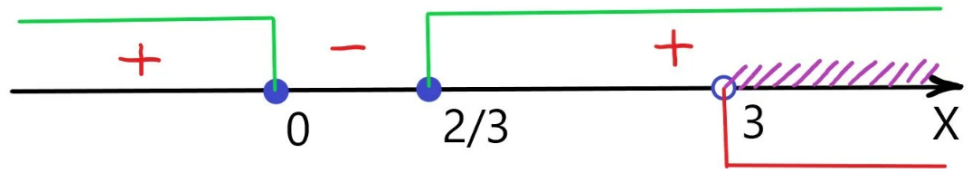
То есть, при $x > 3$ основание будет больше 1, и знак неравенства должен сохраняться (избавляемся от логарифмов):

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 \geq 1, \\ x > 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x \geq 0, \\ x > 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(3x - 2) \geq 0, \\ x > 3. \end{cases}$$

Решаем методом интервалов первое неравенство в системе и находим пересечения с условием $x > 3$:



Метод интервалов

Ответ в первом случае будет $x \in (3; +\infty)$;

Рассмотрим второй случай, когда основания логарифмов больше нуля, но меньше единицы, то есть:

$$0 < \frac{x}{3} < 1;$$

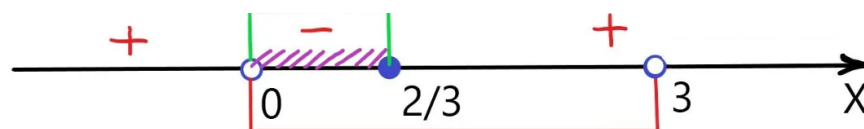
$$0 < x < 3.$$

При этих значениях x основание будет меньше единицы, а значит не забываем поменять знак неравенства:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 \leq 1, \\ 0 < x < 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(3x - 2) \leq 0, \\ 0 < x < 3. \end{cases}$$

Решаем систему при помощи методов интервалов и находим пересечения:



Метод интервалов

Ответом во втором случае будет $x \in (0; \frac{2}{3})$.

Объединяя (важно, что мы находим объединение, а не пересечение) решения 1-го и 2-го случаев, приходим к ответу на наш пример:

Ответ: $x \in (0; \frac{2}{3}) \cup (3; +\infty)$.

Посмотрите, сколько времени и места заняло у нас решение этого, казалось бы, маленького и легкого примера. Во всем виновато переменное основание, которое удвоило нашу работу. Но есть метод, который позволяет избежать всего этого. Он называется **«МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ»**. Кроме того, его часто используют в заданиях ЕГЭ по математике, потому что он существенно сокращает вычисления. Данный метод позволяет свести сложное логарифмическое или **показательное неравенство** к рациональному из 9-го класса.

Метод сужения ОДЗ в логарифмических неравенствах

Эта неприятная штука часто встречается в ЕГЭ по профильной математике и приводит к множеству ошибок и потерянным баллам.

Оказывается, при решении логарифмических неравенств не всегда можно применять

формулы из свойств логарифмов (вынесение степени, логарифм от произведения или частного и т.д.). Это связано с изменением области определения логарифмов.

Что это все значит? Проще обсудить на примерах. Рассмотрим простое неравенство с логарифмом:

Пример 11

$$\log_3(x^2) > 4;$$

Как обычно, начинаем с ОДЗ:

$$x^2 > 0;$$

$$x \neq 0.$$

Решаем сам пример, для этого представим 4-ку справа в виде логарифма с основанием 3.

$$\log_3(x^2) > \log_3(3^4);$$

$$x^2 > 3^4;$$

Разложим в разность квадратов и методом интервалов решим:

$$(x - 9)(x + 9) > 0;$$

$$x \in (-\infty; -9) \cup (9; +\infty);$$

А теперь обратите внимание, что этот же самый пример можно было решить по-другому.

Согласно формуле вынесения степени из-под логарифма $\log_a(b^n) = n * \log_a(b)$, можно вынести 2-ю степень. Сделаем это и посмотрим, к чему все это приведет.

$$\log_3(x^2) > 4;$$

$$2 * \log_3(x) > 4;$$

Сократим на 2:

$$\log_3(x) > 2;$$

Отдельно обратим внимание на то, как изменилось ОДЗ неравенства после вынесения степени.

$$\text{ОДЗ} : x > 0;$$

Продолжаем решать неравенство:

$$\log_3(x) > \log_3(3^2);$$

$$x > 9;$$

Итак, мы решили одно и то же неравенство двумя способами, но ответ получился разный.

Как вы думаете, почему? Какое из решений будет верным?

На самом деле, все очень просто. Напоминаю, что логарифм существует только от положительных чисел. Значит, когда под логарифмом стоит x^2 , то вместо x можно подставлять любые значения, кроме 0. Вторая степень будет превращать подлогарифмическое выражение в положительное независимо от значений x , что нас устраивает. Поэтому могут существовать отрицательные значения x , при подстановке которых ничего не нарушается. Собственно говоря, у нас так и получилось в первом случае: $x \in (-\infty; -9) \cup (9; +\infty)$. Есть отрицательные корни, которые удовлетворяют ОДЗ.

А во втором случае, как только мы вынесли из-под логарифма четную степень, отрицательные корни x больше не подходят, ведь логарифм $\log_3(x)$ не будет существовать, и положительные корни - единственные, которые могут получиться. Другими словами, наше ОДЗ СУЗИЛОСЬ! И, как мы увидели, ответ получился другой, без отрицательных промежутков. Что, разумеется, неправильно.

Очень важное общее правило. Нельзя с логарифмами производить такие преобразования, при которых происходит сужение области допустимых значений ВСЕГО ПРИМЕРА. Если ОДЗ после преобразования остается прежним или увеличивается, то такое преобразование разрешено.

Отдельная очень важная оговорка про то, что ОДЗ не должно сужаться у всего примера. Посмотрите еще раз на разобранный выше пример 6. Там в одном из логарифмов была четная четвертая степень, которую мы не постеснялись вынести, и ни про какое сужение ОДЗ даже речи не было. Неужели неправильно решили пример? Нет, все абсолютно верно, ведь ОДЗ всего неравенства не сузилось, а значит, можно было пользоваться формулой.

Кстати, все эти размышления касаются не только формул вынесения степени, а всех свойств логарифма (суммы, разности и т.д.), нужно быть внимательными! Но чаще всего встречаются

ловушки, связанные с вынесением четной степени.

Пример 12

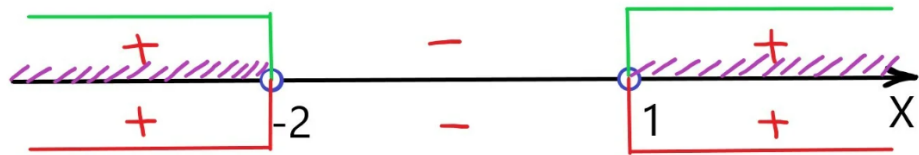
$$9 * \log_7(x^2 + x - 2) \leq 10 + \log_7\left(\frac{(x-1)^9}{x+2}\right).$$

Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0, \\ \frac{(x-1)^9}{x+2} > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)(x-1) > 0, \\ \frac{(x-1)^9}{x+2} > 0. \end{cases}$$

Решаем методом интервалов:



Метод интервалов

$$\begin{cases} x < -2, \\ x > 1. \end{cases}$$

И решаем исходное неравенство на ОДЗ. Разложим квадратный многочлен у первого логарифма на множители и перенесем все логарифмы влево:

$$9 * \log_7(x+2)(x-1) - \log_7\left(\frac{(x-1)^9}{x+2}\right) \leq 10;$$

Воспользуемся формулой $\log_a(b^n) = n * \log_a(b)$:

$$\log_7((x+2)(x-1))^9 - \log_7\left(\frac{(x-1)^9}{x+2}\right) \leq 10;$$

И объединим логарифмы в один при помощи формулы разности $\log_c(a) - \log_c(b) = \log_c\left(\frac{a}{b}\right)$:

$$\log_7\left(\frac{(x+2)^9(x-1)^9(x+2)}{(x-1)^9}\right) \leq 10;$$

$$\log_7(x+2)^{10} \leq 10;$$

Вот здесь очень хочется вынести 10-ю степень и сократить, но так делать НЕЛЬЗЯ. Мы не можем выносить четную степень из-за сужения ОДЗ. Поступим по-хитрому, вынесем только 5-ю степень, тогда четная степень останется на месте, и ОДЗ не изменится:

$$5 * \log_7(x+2)^2 \leq 10;$$

Сократим на 5:

$$\log_7(x+2)^2 \leq 2;$$

Приведем к одному основанию:

$$\log_7(x+2)^2 \leq \log_7(7^2);$$

$$(x+2)^2 \leq 49;$$

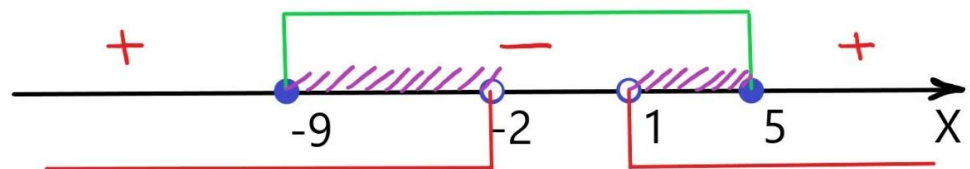
$$x^2 + 4x - 45 \leq 0;$$

$$(x-5)(x+9) \leq 0;$$

Решаем методом интервалов:

$$-9 \leq x \leq 5.$$

Вспоминаем про ОДЗ и находим пересечение:



Метод интервалов

Ответ: $x \in [-9; -2) \cup (1; 5]$.