Углы с сонаправленными сторонами, угол между прямыми в пространстве. Параллельность плоскостей: параллельные плоскости, свойства параллельных плоскостей

1. Верно ли утверждение: если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны?
2. Две прямые параллельны некоторой плоскости. Могут ли эти прямые:
а) Пересекаться?
б) Быть скрещивающимися?
3. Могут ли скрещивающиеся прямые a и b быть параллельными прямой c?
4. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Точки A и A1 лежат на прямой a, точки B и B1 лежат на прямой b. Как будут расположены прямые AB и A1B1?
5. Прямая a скрещивается с прямой b, а прямая b скрещивается с прямой c. Следует ли из этого, что прямые a и c - скрещиваются?
6. Каково должно быть взаимное расположение трех прямых, чтобы можно провести плоскость, содержащую все прямые?

Любая прямая a, лежащая в плоскости, разделяет плоскость на 2 части, называемые полуплоскостями. Прямая a называется границей каждой из этих полуплоскостей.
Два луча OA и O1A1 (рис. 1), не лежащие на одной прямой, называются «‹направленными, если они параллельны и лежат в одной плоскости с границей OO1. Два луча OA и O1A1, лежащие на одной прямой, называются сонаправленными, если они совпадают или один из них содержит другой.

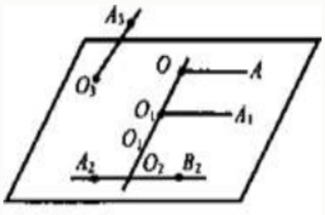


Рис. 1

1. Найти сонаправленные лучи.
2. Указать лучи, которые не являются сонаправленными.

Теорема:
Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.
Дано: ∠O и ∠O1 с сонаправленными сторонами (рис. 2).
Доказать: ∠O = ∠O1.

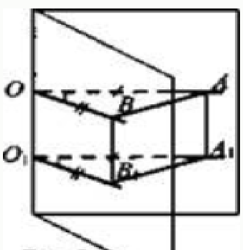


Рис. 2

Доказательство: На сторонах угла O отметим любые точки A и B и на соответственных сторонах угла O1 отметим точки A1 и B1 такие, что O1A1 = OA и O1B1 = OB.

1. Рассмотрим OAA1O1. $\left.\begin{matrix} OA \parallel O_1A_1 \\ OA = O_1A_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow OA \parallel O_1A_1\ \ OAA_1O_1$ - параллелограмм (по признаку). Значит, AA1 || OO1 и AA1 = OO1.

2. Рассмотрим OBB1O1. $\left.\begin{matrix} OB \parallel O_1B_1 \\ OB = O_1B_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow OBB_1O_1$ - параллелограмм (по признаку). Значит, BB1 || OO1 и BB1 = OO1.

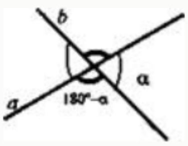
Вывод:

$AA_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 \parallel OO_1 \Rightarrow AA_1 \parallel BB_1$; $AA_1 = OO_1$ и $BB_1 = OO_1 \Rightarrow AA_1 = BB_1$. Следовательно, четырехугольник AA1BB1 - параллелограмм (по признаку). Следовательно, AB = A1B1.

3. Рассмотрим ΔABO и ΔA1B1O1. ΔABO = ΔA1B1O1 (по трем сторонам).
Вывод:
∠O = ∠O1.

Углом между пересекающимися прямыми называется угол, не превосходящий любой из трех остальных (то есть наименьший из четырех образованных). Необходимо подчеркнуть, что угол между прямыми - это градусная мера, а не геометрическая фигура.

По определению $0° < \alpha \le 90°$.



Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD определяется как угол между пересекающимися прямыми A1B1 и C1D1 соответственно параллельными AB и CD (рис. 3).

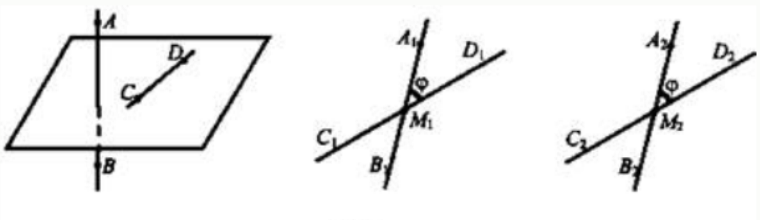


Рис. 3

Зависит ли величина угла φ от выбора точки M1?
Выбрать (отметим) любую точку M2 и построить A2B2 || AB и C2D2 || CD.
Ответить на вопросы:

Выбрать (отметим) любую точку M2 и построить A2B2 || AB и C2D2 || CD.
Ответить на вопросы:

1. Почему A2B2 || A1B1 и C2D21 || C1D1? (По теореме о трех параллельных прямых.)
2. Являются ли углы ∠A1M1D1 и ∠A2M2D2 углами с соответственно параллельными сторонами? (Да.)

Вывод:

1) ∠A1M1B1 = ∠A2M2B2 (по изученной теореме).
2) Величина угла между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки.

1. Дан куб ABCDA1B1C1D1 (рис. 4).

Найдите угол между прямыми. 1) BC и CC1 2) AC и BC ; 3) D1C1 и BC 4) A1B1 и AC

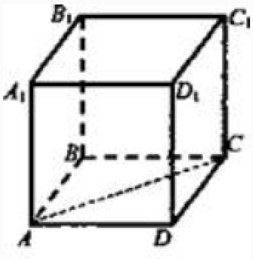


Рис. 4

2. Задача (в тетрадях).

Дано: OB || CD; OA и CD скрещиваются;

а) ∠AOB = 40°; б) ∠AOB = 135°; в) ∠AOB = 90° (рис. 5).

Найти: угол между OA и CD.

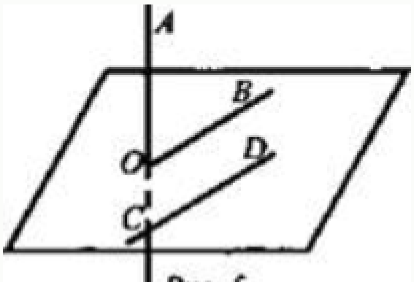


Рис. 5

3. Задача

Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях. PK - средняя линия ΔADC с основанием AC. Определить взаимное расположение прямых PK и AB и найти угол между ними, если ∠C = 80°; ∠B = 40°.

Дано: ΔADC и ΔABC; PK - средняя линия ΔADC. ∠B = 40°; ∠C = 80° (рис. 6).

Определить: взаимное расположение прямых PK и AB угол между PK и AB.

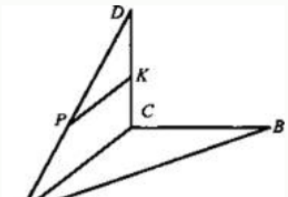


Рис. 6

4.Задача Дано: ABCD - параллелограмм; ABEK - трапеция. AB = 22,5 см. EK = 27,5 см и ABEK - описанный около окружности четырехугольник (рис. 8).

Определить: взаимное расположение CD и EK.

Найти: PABKE.

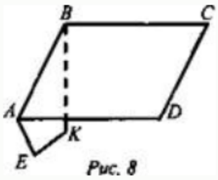


Рис. 8

Алгоритм нахождения угла между скрещивающимися прямыми.

1. Определить вид многогранника
2. Если данный многогранник куб, прямоугольный параллелепипед, прямая треугольная призма, то применить метод координат.
3. Если иной многогранник, то заменить одну (две) скрещивающиеся прямые на параллельные им, имеющие общую точку и найти данный угол из полученного треугольника.