

Понятие об аксиоматическом построении стереометрии: аксиомы стереометрии и следствия из них.

На предыдущем уроке мы записали аксиомы стереометрии, а сегодня познакомимся со следствиями из этих аксиом.

На основе аксиом можно доказать несколько простых теорем стереометрии.

Запишите обозначения

ОБОЗНАЧЕНИЯ

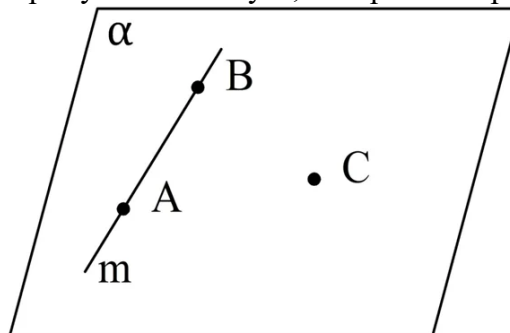
$A \in a$	Точка A принадлежит прямой a
$B \notin a$	Точка B не принадлежит прямой a
$A \in \alpha$	Точка A принадлежит плоскости α
$B \notin \alpha$	Точка B не принадлежит плоскости α
$a \subset \alpha$	Прямая a лежит в плоскости α
$b \not\subset \alpha$	Прямая b не лежит в плоскости α
$b \cap \alpha = A$	Прямая b пересекает плоскость α в точке A
$\alpha \cap \beta = c$	Плоскости α и β пересекаются по прямой c

Теорема 1.

Через прямую и точку, не лежащую на ней, можно провести плоскость, и притом единственную.

Доказательство.

Возьмем произвольную прямую m и точку C , которая НЕ принадлежит m .



Далее отметим на m две любые точки и обозначим их как A и B : По аксиоме 1 через A , B , C можно провести некоторую плоскость α . По аксиоме 4 прямая m будет принадлежать α . Тем самым мы показали, что существует плоскость, проходящая через m и C . Единственность этой плоскости вытекает уже из аксиомы 2, ведь через A , B и C нельзя провести две различных плоскости, ч. т. д.

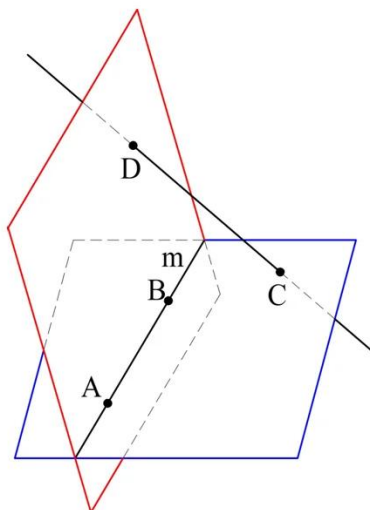
Иногда доказанный факт формулируют иначе: прямая и точка, не находящаяся на прямой, однозначно определяют проходящую через них плоскость. То есть, указав прямую и точку, можно одновременно указать на ту плоскость, которая задается ими.

Теорема 2.

Через любую прямую можно провести
бесконечно много различных плоскостей.

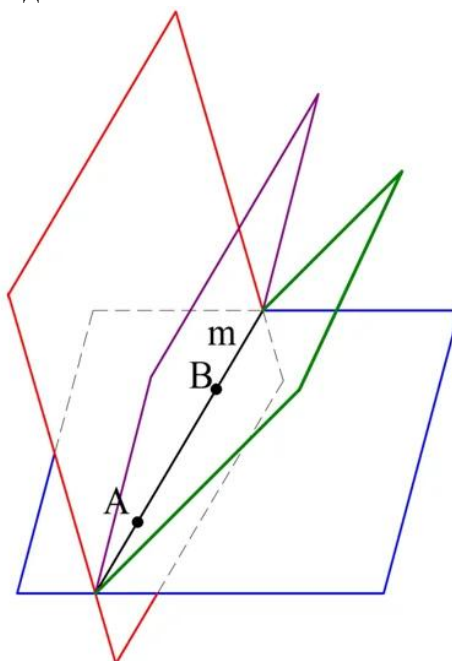
Доказательство

Отметим на произвольной прямой m точки A и B . Далее выберем ещё две точки в пространстве C и D , причем такие, что A, B, C и D не находятся в одной плоскости. Тогда у нас есть плоскости ABC и ABD , которые пересекаются по прямой AB :



Теперь соединим C и D прямой. Прямая CD состоит из бесконечного количества точек. Через каждую из них можно провести единственную плоскость, которая будет проходить через AB . Так как точек бесконечно много, то и плоскостей будет бесконечно много. Осталось лишь показать, что никакие две таких плоскости не будут совпадать, то есть все они различны.

Действительно, пусть две таких плоскости совпадают, то есть на самом деле являются одной плоскостью. Тогда получается, что эта единая плоскость проходит через две точки прямой CD . Тогда, по аксиоме 4, вся прямая CD принадлежит этой плоскости, в том числе и сами точки C и D . Но плоскость проходит также через A и B . То есть получится, что A, B, C и D входят в состав одной плоскости, а это не так. Это противоречие означает, что на самом деле все плоскости, проходящие через разные точки прямой CD , будут различны, ч. т. д.

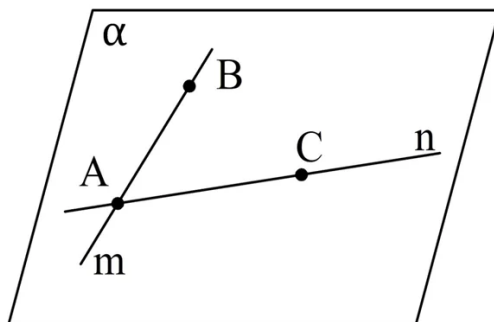


Теорема 3.

Через любые две пересекающиеся
прямые можно провести плоскость, и
притом единственную.

Доказательство

Пусть пересекаются прямые m и n . Обозначим точку их пересечения как A . Также выберем на m некоторую точку B , а на n – точку C . Мы можем построить плоскость α через точки A , B и C , и она будет единственной. Так как и A , и B принадлежат α , то и вся прямая m ей принадлежит (аксиома 4). Аналогично и прямая n находится на плоскости α . То есть α как раз и является плоскостью, о которой говорится в теореме. Никакая другая плоскость не будет содержать обе прямые m и n , ведь в противном случае она проходила бы через точки A , B и C , то есть совпадала бы с α .



Эта теорема также говорит о том, что две пересекающиеся прямые однозначно определяют проходящую через них плоскость.

Задачи на использование аксиом

Простейшие задачи стереометрии по большей части не требуют проведения расчетов и использования формул, однако приходится использовать строгие логические умозаключения. Чаще всего они сводятся к доказательству довольно очевидных утверждений.

Задание 1.

Точки M , N , P , K не лежат на одной прямой. Могут ли прямые MN и PK пересекаться?

Решение.

Если бы MN и PK пересекались бы, то через эти прямые можно было бы провести плоскость. Эта плоскость содержала бы все точки прямых, в том числе M , N , P и K . Но эти точки по условию не могут принадлежать одной прямой. Значит, MN и PK не пересекаются.

Задание 2.

Есть 4 точки, из которых три принадлежат одной прямой. Могут ли эти точки не лежать на единой плоскости?

Решение.

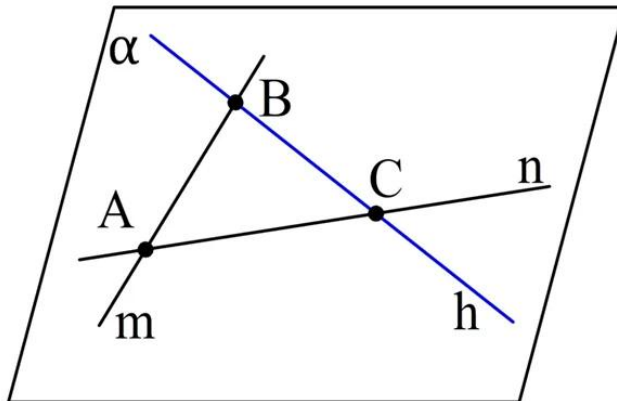
Пусть точки P , K , M находятся на единой прямой PK , а N – ещё одна точка.

Продолжаем самостоятельно

Задание 3.

Через пересекающиеся прямые m и n проведена плоскость α . Верно ли, что любая прямая h , пересекающая m и n в различных точках, будет также принадлежать α ?

Решение.



Пусть прямая h пересекает m и n в точках B и C соответственно.

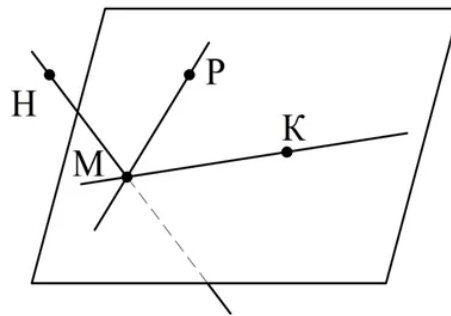
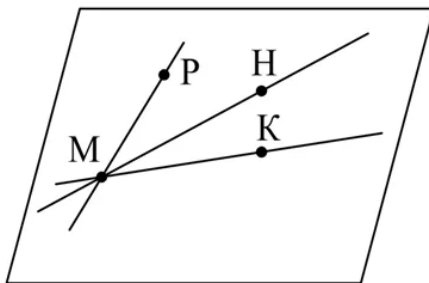
Продолжаем самостоятельно

Задание 4.

Три прямые проходят через общую точку M . Верно ли, что они находятся в одной плоскости?

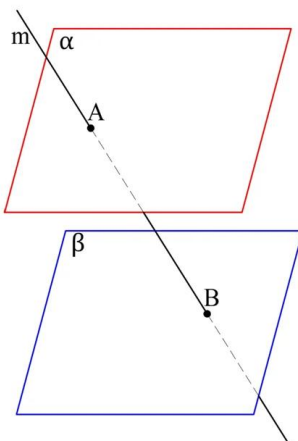
Решение.

Неверно, они могут как находиться, так и не находиться в одной плоскости. Оба случая проиллюстрируем примерами. Пусть есть точки M , P , K и H , причем они одной плоскости не принадлежат. Тогда прямые MP , MK , MH пересекаются в M , но находятся в одной плоскости. Если же мы выберем точки M , P , K , H так, чтобы они находились на единой плоскости, то прямые MP , MK , MH пересекутся в M и будут принадлежать одной плоскости.



Задание 5.

Плоскости α и β не пересекаются. Прямая m пересекает α . Докажите, что она также пересекает β .



Решение.

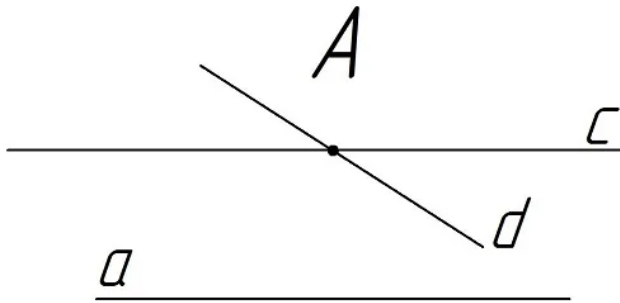
Сразу скажем, что эта задача сложнее предыдущих, и ее решение неочевидно. Дадим подсказку: при решении стереометрических задач можно использовать и аксиомы планиметрии, в том числе и знаменитую аксиому о параллельных прямых.

Две прямые параллельны, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Аксиома параллельности

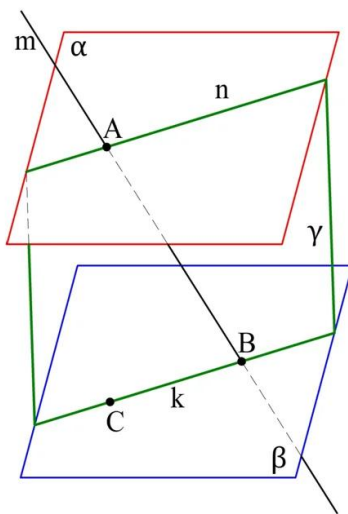
Ясно, что через точку, лежащую на прямой, не получится провести другую прямую, которая будет ей параллельна. Но в противном случае это возможно. В древности Евклид, великий древнегреческий ученый, создавший классическую геометрию, сформулировал знаменитую аксиому параллельности, известную как пятый постулат:

Через любую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну, и притом единственную, прямую, параллельную данной.



Теперь приведем решение.

Пусть m пересекает α в точке A . Отметим на β произвольную точку C . Теперь мы можем провести ещё одну плоскость γ через прямую m и точку C :



Плоскости γ и β имеют общую точку C . Значит, они пересекаются по некоторой прямой k . У плоскостей γ и α есть общая точка A , поэтому и они пересекаются по некоторой прямой n .

Теперь проанализируем расположение прямых n и k . Они не могут пересекаться, ведь тогда бы точка их пересечения была общей для α и β , а они не пересекаются. Также n и k лежат в одной плоскости. Тогда n и k по определению параллельны.

Напомним, что по аксиоме параллельности через точку на плоскости может быть проведена лишь одна прямая, параллельная заданной прямой. В частности, через точку A мы можем провести только одну прямую, параллельную k . Такая прямая уже проведена – это n .

Тогда вторая прямая, проходящая через A (это как раз m) либо совпадает с n , либо пересекает k . Совпадать с n она не может, ведь в этом случае m будет полностью принадлежать плоскости α , а она по условию лишь пересекает ее. Значит, m должна

пересечь k в некоторой точке B . Эта точка B принадлежит прямой k , а значит, находится и на плоскости β . Тем самым мы показали, что m и β пересекаются в точке B .

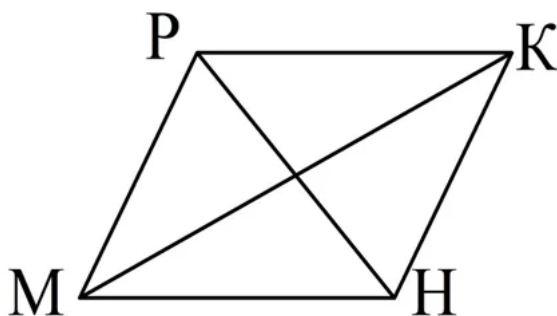
Для полноты доказательства надо ещё показать, что m имеет ровно одну общую точку с β . Действительно, если бы была ещё одна общая точка, то по аксиоме 4 вся прямая m находилась бы на β . Тогда и точка A оказалась бы на β , то есть она стала бы общей точкой α и β , но таких общих точек по условию не существует, ч. т. д.

Задание 6.

Четыре точки в пространстве выбраны так, что никакая прямая, проходящая через две из этих точек не пересекается с прямой, проходящей через другие две точки. Могут ли эти четыре точки находиться на одной плоскости?

Решение.

Предположим, что есть точки M , P , K и H , удовлетворяющие условию задачи и находящиеся на одной плоскости. Ясно, что никакие три из этих точек не принадлежат одной прямой. Тогда мы можем построить четырехугольник $MPKH$.



Прямые MP и KH по условию не должны пересекаться, то есть они параллельны. Аналогично параллельны MH и PK . Значит, $MPKH$ – параллелограмм по его определению. Но в параллелограмме пересекаются диагонали MK и PH , а по условию и эти прямые не должны пересекаться. Получили противоречие. Из него вытекает, что M , P , K и H НЕ могут находиться на одной плоскости.

ДЗ

№1. В пространстве даны три точки A , B , C такие, что $AB=14$ см, $BC=16$ см, $AC=18$ см. Найдите площадь треугольника ABC .

№2. Четыре точки не лежат в одной плоскости. Могут ли какие-нибудь три из них лежать на одной прямой? Ответ объясните.

№3. В пространстве даны три точки M , K , B такие, что $MK=13$ см, $MB=14$ см, $KB=15$ см. Найдите площадь треугольника MKB .

№4. Докажите, что если прямые AB и CD не лежат в одной плоскости, то и прямые AC и BD не лежат в одной плоскости.