

Практическая работа 9

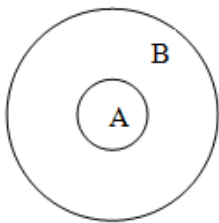
Тема: Элементы теории множеств

Цель работы: уметь решать задачи с помощью кругов Эйлера.

1) *Повторить краткие теоретические сведения и разобрать задачи с решениями.*

Множество A называют подмножеством множества B , если любой элемент множества A является элементом множества B .

Графически это выглядит так

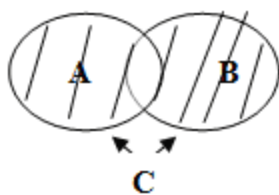


Можно дать другое определение равных множеств. Два множества называются равными, если они являются взаимными подмножествами.

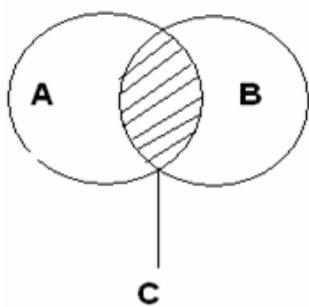
$$A \subset B \text{ и } B \subset A \Rightarrow A = B$$

Рассмотрим операции над множествами и их графическую иллюстрацию

1. Объединение множеств A и B изображаем:

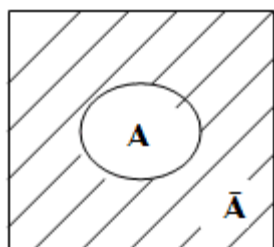


2. Пресечение двух множеств A и B изображаем:



В любой имеющей смысл задаче обычно рассматриваются подмножества некоторого "наибольшего" множества U , которое называют универсальным множеством. Универсальное множество - это самое большое множество, содержащее в себе все множества, рассматриваемые в задаче.

Множество всех элементов универсального множества U , не принадлежащих множеству A называется дополнением множества A до U и обозначается $\bar{A}$



Мощностью конечного множества называется количество его элементов.

Для конечного множества A через $m(A)$ обозначим число элементов в множестве A .

Из определения следуют свойства:

$$m(A) + m(\bar{A}) = m(U)$$

$$A = B \Rightarrow m(A) = m(B)$$

Для любых конечных множеств справедливы так же утверждения:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) - m(A \cap B \cap C).$$

Решение задач с помощью кругов Эйлера.

Этот способ решать задачи придумал в XVIII в. великий Леонард Эйлер.

Задача.

В олимпиаде по математике приняло участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. По алгебре решили задачу 20 человек, по геометрии – 18 человек, по тригонометрии – 18 человек. По алгебре и геометрии решили 7 человек, по алгебре и тригонометрии – 9 человек. Ни одной задачи не решили 3 человека. Сколько учащихся решили все задачи? Сколько учащихся решили только две задачи? Сколько учащихся решили только одну задачу?

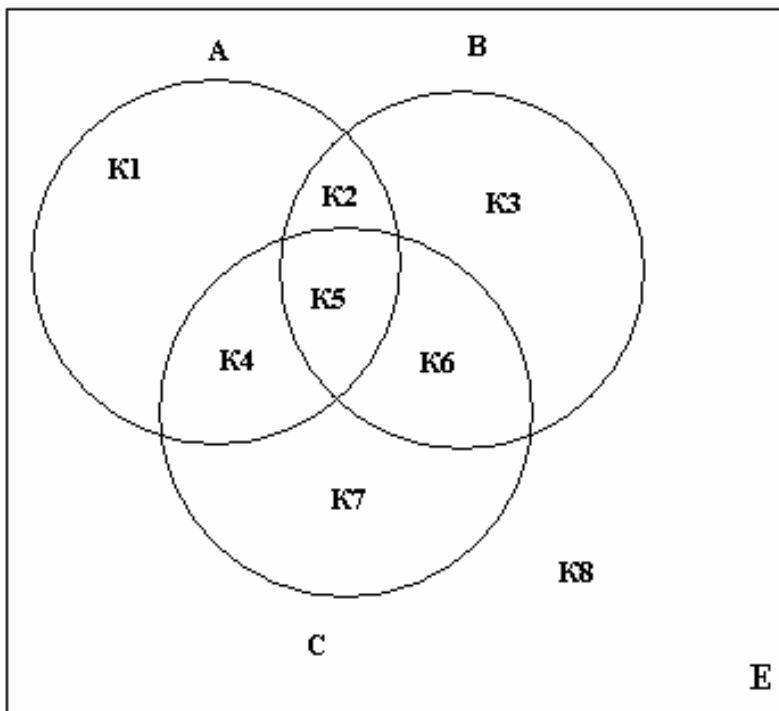
Решение.

Запишем коротко условие и покажем решение:

$$m(E) = 40; m(A) = 20; m(B) = 18; m(C) = 18; m(A \cap B) = 7; m(A \cap C) = 8; m(B \cap C) = 9;$$

$$m(ABC) = 3 \Rightarrow m(ABC) = 40 - 3 = 37$$

Изобразим множества А, В, С (рис.5).



K1 – множество учеников, решивших только одну задачу по алгебре;

K2 – множество учеников, решивших только две задачи по алгебре и геометрии;

K3 – множество учеников, решивших только задачу по геометрии;

K4 – множество учеников, решивших только две задачи по алгебре и тригонометрии;

K5 – множество всех учеников, решивших все три задачи;

K_6 – множество всех учеников, решивших только две задачи, по геометрии и тригонометрии;

K_7 – множество всех учеников, решивших только задачу по тригонометрии;

K_8 – множество всех учеников, не решивших ни одной задачи.

Используя свойство мощности множеств и рисунок можно выполнить вычисления:

$$m(K_5) = m(A \cap B \cap C) = m(ABC) - m(A) - m(B) - m(C) + m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C);$$

$$m(K_5) = 37 - 20 - 18 - 18 + 7 + 8 + 9 = 5; \quad m(K_2) = m(A \cap B) - m(K_5) = 7 - 5 = 2$$

$$m(K_4) = m(A \cap C) - m(K_5) = 8 - 5 = 3; \quad m(K_6) = m(B \cap C) - m(K_5) = 9 - 5 = 4$$

$$m(K_1) = m(A) - m(K_2) - m(K_4) - m(K_5) = 20 - 2 - 3 - 5 = 10;$$

$$m(K_3) = m(B) - m(K_2) - m(K_6) - m(K_5) = 18 - 2 - 4 - 5 = 7;$$

$$m(K_7) = m(C) - m(K_4) - m(K_6) - m(K_5) = 18 - 3 - 4 - 5 = 6$$

$m(K_2) + m(K_4) + m(K_6) = 2 + 3 + 4 = 9$ – число учеников решивших только две задачи;

$m(K_1) + m(K_3) + m(K_7) = 10 + 7 + 6 = 23$ – число учеников решивших только одну задачу.

Ответ: 5 учеников решили три задачи; 9 учеников решили только по две задачи; 23 ученика решили только по одной задаче.

2) Решить задачи:

Задача № 1. В классе 35 учеников. Каждый из них пользуется хотя бы одним из видов городского

транспорта: метро, автобусом и троллейбусом. Всеми тремя видами транспорта пользуются 6 учеников, метро и автобусом – 15 учеников, метро и троллейбусом – 13 учеников, троллейбусом и автобусом – 9 учеников. Сколько учеников пользуются только одним видом транспорта?

Задача № 2. Каждый из 35 шестиклассников является читателем, по крайней мере, одной из двух библиотек: школьной и районной. Из них 25 человек берут книги в школьной библиотеке, 20 – в районной.

Сколько шестиклассников: 1. Являются читателями обеих библиотек; 2. Не являются читателями районной библиотеки; 3. Не являются читателями школьной

библиотеки; 4. Являются читателями только районной библиотеки; 5. Являются читателями только школьной библиотеки?

Задача № 3.

По результатам опроса 52 шестиклассников было установлено, что 23 из них собирают значки, 35 собирают марки, а 16 — и значки, и марки. Остальные не увлекаются коллекционированием. Сколько человек не увлекаются коллекционированием?