

Практическая работа № 28

Алгоритмы моделирования кратчайших путей между вершинами (построение дерева решений, алгоритм Дейкстры, метод динамического программирования). Элементы теории игр (выигрышная стратегия)

1. Цель работы: Освоить алгоритмы моделирования кратчайших путей между вершинами (построение дерева решений, алгоритм Дейкстры, метод динамического программирования). Ознакомиться с элементами теории игр (выигрышной стратегией).

2. Оборудование, приборы, аппаратура, материалы: компьютер с выходом в Интернет, инструкционная карта

3. Краткие теоретические сведения.

Графы как информационные модели находят широкое применение во многих сферах нашей жизни. Поиск оптимального транспортного маршрута, кратчайшего объездного пути, расположения торговых точек, проектирования инженерных сетей и линий электропередач приводят к задаче поиска кратчайшего пути.

Путь между вершинами A и B графа считается **кратчайшим**, если:

- эти вершины соединены минимальным числом ребер (в случае, если граф не является взвешенным)
- сумма весов ребер, соединяющих эти вершины, минимальна (для взвешенного графа)



Ход работы.

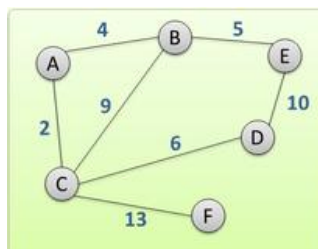
Построение дерева решений

Алгоритм построения дерева решений, как правило, используется для нахождения кратчайшего пути в ориентированном графе.

4. Задания

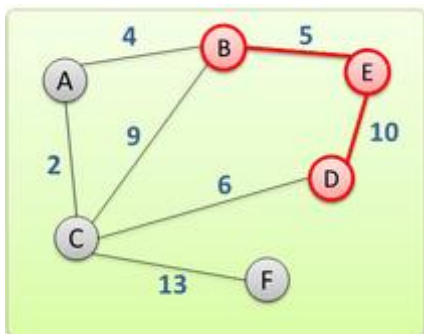
Задача 1.

На рисунке представлена схема дорог, связывающих населённые пункты A, B, C, D, E, F . Вес ребра означает стоимость проезда между двумя населёнными пунктами. Определить минимальную стоимость проезда из пункта E в пункт C .

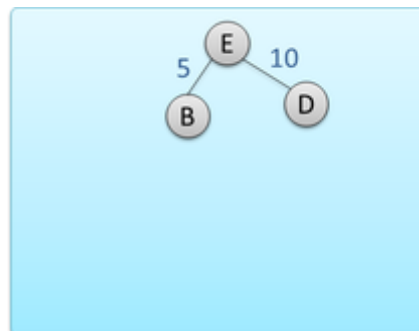


Решение:

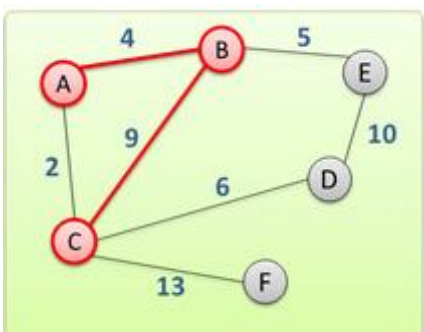
1 действие:



Строим дерево, начиная с пункта E, в него можно попасть из пунктов B и D, проставляем вес каждого ребра

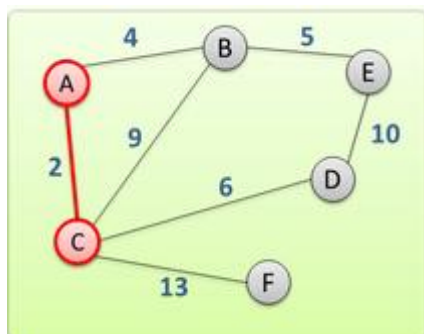


2 действие:



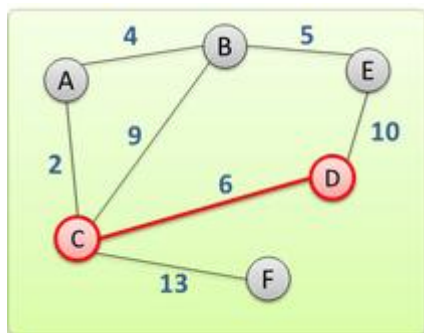
Смотрим из каких вершин можно попасть в вершину B, строим дальше дерево решений, проставляем вес каждого ребра

3 действие:



Смотрим, чтобы каждая ветка заканчивалась листиком C

4 действие:



Выбираем ветку с минимальным числом, это и будет ответ

Ответ:

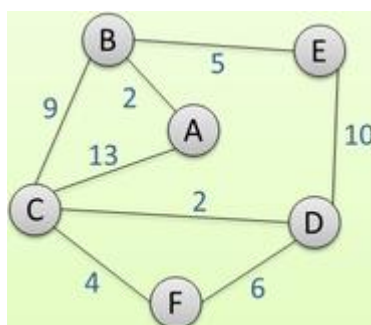
Алгоритм Дейкстры

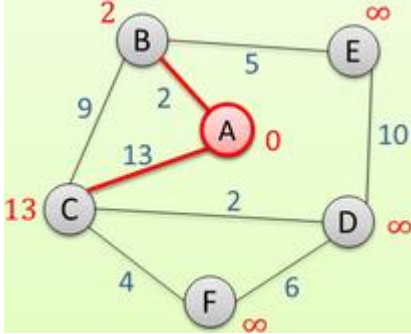
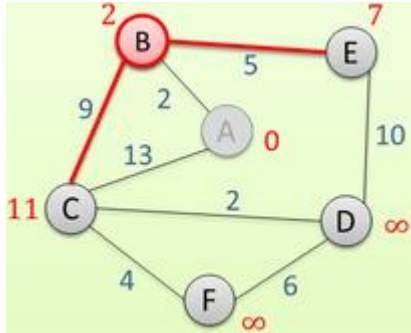
Алгоритм Дейкстры служит для нахождения кратчайшего пути между вершиной (источником) и всеми остальными вершинами графа.



Задача 2.

Определить минимальное расстояние от вершины A до F.



	<p>Найдем вершину с минимальной меткой, определим минимальное расстояние до смежных вершин, отметим вершину как рассмотренную и проверим есть ли непосещенные вершины</p>
	<p>Повторим выше перечисленные действия.</p>
<p><i>Отмечаем вершину E</i></p>	<p>Повторим выше перечисленные действия еще раз.</p>
<p><i>Отмечаем вершину C</i></p>	<p>Повторим выше перечисленные действия еще раз.</p> <p>Ответ:</p>

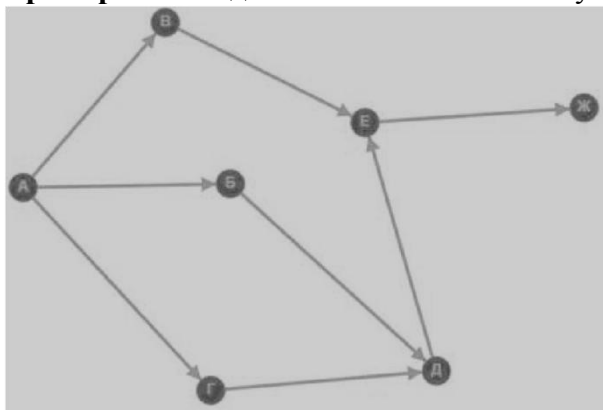
Метод динамического программирования

Динамическое программирование - это такой метод решения задач, основанный на разбиении одной сложной задачи на несколько простых. Например, подготовиться к экзамену гораздо проще, если в течение года постепенно изучать все темы, прописанные в кодификаторе, нежели воспринимать это как целостную задачу в последнюю перед экзаменом ночь.

Какая связь у динамического программирования и графов?

Возникает логичный вопрос - а как же связаны эти две темы в рамках сегодняшнего занятия? Уловить связь очень просто, если знать еще одно свойство графа, ребра которого являются векторами (такой граф еще называют ориентированным): количество путей, по которым можно добраться из начальной вершины графа до конечной, равно сумме количеств путей, по которым можно добраться до каждой из вершин графа, ведущих в конечный пункт.

Пример: необходимо найти количество путей из пункта **А** в пункт **Ж**.



количество вершин графа

А	1
Б	
В	
Г	
Д	
Е	
Ж	

Катастрофической ошибкой студентов является то, что они начинают считать количество путей вручную, не пользуясь «золотым» правилом графа. На самом деле, при сложном построении графа, количество путей может преодолеть и отметку в тысячу путей. Мы же так опрометчивы не будем, а воспользуемся правилом, только решать мы будем не с конца, а сначала. Построим табличку, размеры которой: 2 столбца и N строк, где N количество вершин графа.

Конечная таблица должна выглядеть следующим образом:

А	1
Б	1
В	1
Г	1
Д	2
Е	3
Ж	3

Ответ на эту задачу: 3

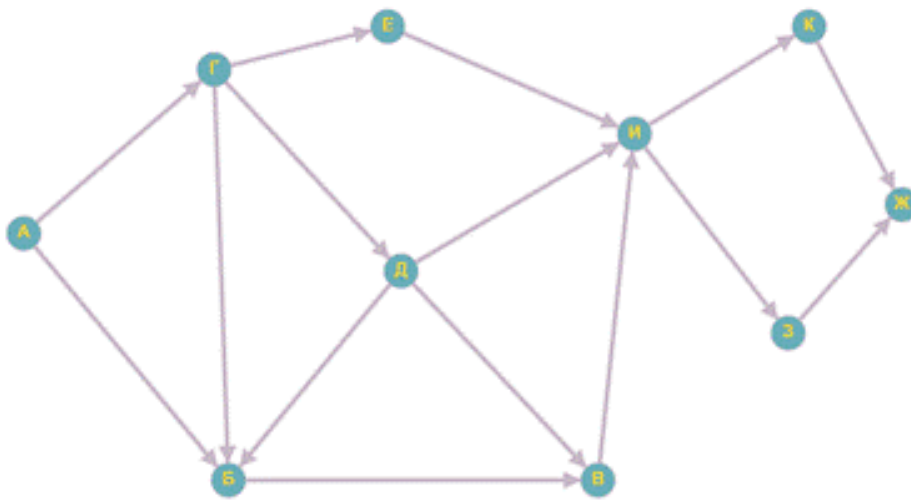
Заполняется таблица следующим образом: в левом столбце записываются все вершины, в правом – количество путей до каждой из них. Принято считать, что количество путей до стартовой вершины (в нашем случае до вершины А) равно единице. Далее наша задача заключается в поиске вершин, в которые ведет дорога только из найденных (по числу путей) вершин. Пока что мы знаем только вершину А, значит ищем вершины, в которые ведет дорога из вершины А. В нашем случае это вершины: Б, В, Г. Напомню: количество путей, по которым можно добраться из начальной вершины графа до конечной, равно сумме количеств путей, по которым можно добраться до каждой из вершин графа, ведущих в конечный пункт. Значит, в вершины Б, В, Г ведет всего один путь. Запишем это в таблицу.

Теперь нам известны вершины А, Б, В, Г, значит ищем неизвестные вершины, в которые ведет дорога только из этих пунктов. В нашем случае это вершина Д. В нее ведут дороги из известных нам Б и В, значит количество путей до пункта Д равно сумме количеств путей до пунктов Б и Г, т.е. до Д мы можем добраться двумя

способами. Так же занесем это в таблицу. Следующий пункт – это пункт Е. В него ведут дороги из В и Д, значит в пункт Е можно добраться 3 способами (В+Д). Аналогично в пункт Ж, т.к. в него ведет дорога только из известного нам пункта Е.

Задача 3. Для самостоятельного решения

Найти количество путей из пункта А в пункт Ж



Теория игр

Теория игр — математический метод изучения оптимальных стратегий в играх. Под игрой понимается процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущих борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует некоторую стратегию, которая может вести к выигрышу или проигрышу — в зависимости от поведения других игроков. Теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учётом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках.

Математическая теория игр берёт своё начало из экономики. Впервые математические аспекты и приложения теории были изложены в классической книге 1944 года Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» (англ. Theory of Games and Economic Behavior).

Эта область математики нашла некоторое отражение в общественной культуре. В 1998 году американская писательница и журналистка Сильвия Назар издала книгу о судьбе Джона Нэша, нобелевского лауреата по экономике и учёного в области теории игр; а в 2001 по мотивам книги был снят фильм «Игры разума».

Выигрышная стратегия — это правило, следуя которому игрок выигрывает независимо от того, как играет противник. Выигрышная стратегия может быть только у одного игрока. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации при различной игре противника.

Признаки игры:

- присутствием нескольких игроков;

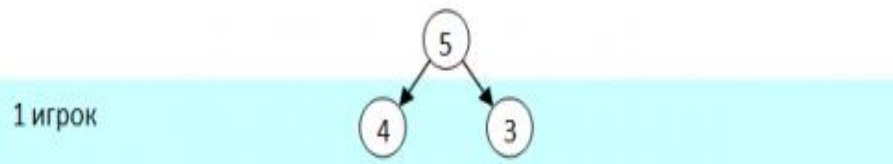
- неопределённостью, связанной с поведением игроков, у каждого из которых есть несколько вариантов действий;
- различием (несовпадением) интересов игроков;
- взаимосвязанностью поведения игроков (результат, получаемый каждым из них, зависит от поведения всех игроков);
- наличие правил поведения, известных всем игрокам.

Рассмотрим пример:

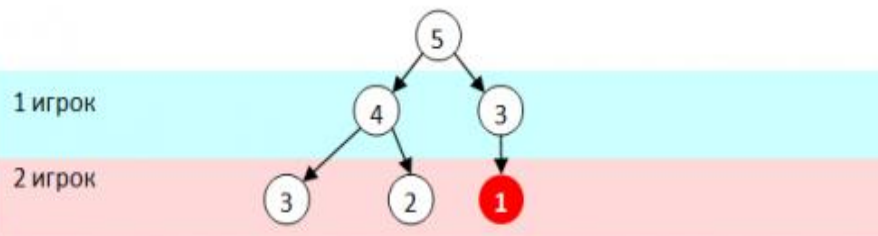
Игра: в кучке лежит 5 спичек; играют два игрока, которые по очереди убирают спички из кучки; условие: за один ход можно убрать 1 или 2 спички; выигрывает тот, кто оставит в кучке 1 спичку

Решение:

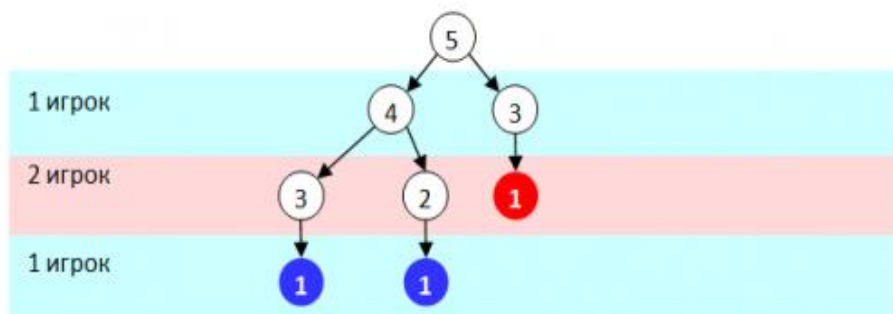
- Будем использовать метод построения дерева. Первый играющий может убрать одну спичку (в этом случае их останется 4) или сразу 2 (останется 3), эти два варианта отобразим при помощи дерева:



- если первый игрок оставил 4 спички, второй может своим ходом оставить 3 или 2; а если после первого хода осталось 3 спички, второй игрок может выиграть, взяв две спички и оставив одну:



- если осталось 3 или 2 спички, то 1-ый игрок (в обеих ситуациях) выигрывает своим ходом:



проанализируем стратегию игры:

- если первый игрок своим первым ходом взял две спички, то второй сразу выигрывает; если же он взял одну спичку, то своим вторым ходом он может выиграть, независимо от хода второго игрока;
- итак, убрав всего одну спичку первым ходом, 1-ый игрок всегда может выиграть на следующем ходу;
- тогда как второй игрок не может выиграть, независимо от действий первого: потому что, если первый игрок сначала убрал одну спичку, второй всегда проиграет.

Ответ: при правильной игре (стратегии игры) выиграет первый игрок; для этого ему достаточно своим первым ходом убрать одну спичку.

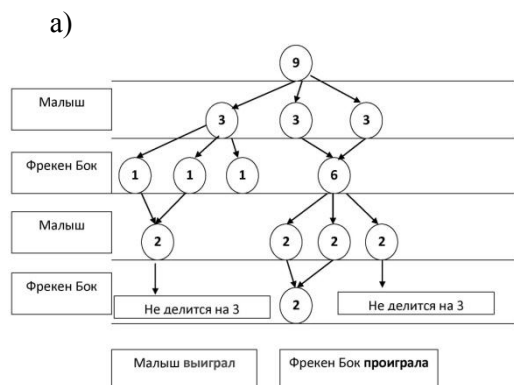
Задача 4.

Малыш и Фрекен Бок играют в игру. На столе лежат конфеты. Первым ходом Малыш делит конфеты на три непустых кучки, потом Фрекен Бок две кучки отдает Карлсону, а третью снова делит на три не пустых, потом Малыш также две отдает Карлсону, третью делит и так далее. Кто не сможет сделать ход проигрывает.

Кто победит при верной игре, если на столе:

а) 9 конфет? б) 7 конфет? в) 12 конфет? г) 14 конфет?

Рассмотрим случай, когда в кучке 9 конфет, построим дерево игры



Пусть игра началась с какого-то большого числа конфет. Чем она закончилась? Тем, что у игрока нет хода. Это бывает, когда конфет ему досталось 1 или 2. Это позиции проигрышные для того, кому они достались. Позиция 3-выигрышная. Имея три конфеты, игрок делит их на три кучки по конфете, и сопернику остается одна конфет. Игрок выиграл. Выиграть можно и при 4, 5 и 6 конфетах. Делить 6 конфет надо с умом ($6=2+2+2$), деля на ($6=1+1+4$) игрок проиграет.

Теперь рассмотрим 7 конфет. Игрок может их разложить на кучки ($3+3+1$), ($4+2+1$), ($5+1+1$). Соперник оставляет ему 1 конфету. Игрок проиграл.

Постройте дерево игры для каждого варианта – б), в), г)

Стратегия выигрыша Малыша: если в кучке 7,8 или 13,14 конфет, то Малыш должен предложить Фрекен Бок первый ход и вести верную игру. Если в кучке от 3 до 6 конфет или от 9 до 12, то его ход должен быть первым.

Ответ:

- а) Малыш *выиграл*, если в кучке 9 конфет
 б) Малыш _____, если в кучке 7 конфет
 в) Малыш _____, если в кучке 12 конфет
 г) Малыш _____, если в кучке 14 конфет при верной игре.

Задача 5.

В коробке 60 спичек. За один ход можно взять любое количество спичек от 1 до 5. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков выиграет при правильной игре?(игроков – два)

Вставь в текст стратегии правильное количество и правильные термины.

Если количество спичек меньше или равно _____, то тот игрок, чья очередь ходить, заканчивает игру и выигрывает. Если же количество спичек равно _____, то игрок, чей ход был до появления этой позиции, свои следующим ходом заканчивает игру. Значит, эта позиция _____ для того, кто ходит.

Аналогично проигрышными являются позиции, когда количество спичек кратно _____. Значит, и позиция «60 спичек» является _____ для того, кто будет ходить, то есть для _____ игрока.

Термины: 4, 5, 6, 7, проигрышна, выигрышна, проигрышной, выигрышной, первого, второго

5. Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Задание и его решение.
4. Ответы на контрольные вопросы.
5. Вывод по работе.

6. Контрольные вопросы

1. Граф – это
2. Перечислить алгоритмы нахождения кратчайшего пути.
3. В чем заключается суть алгоритма Дейкстры.
4. Динамическое программирование – это ...
5. Что значит выигрышная стратегия

Сделайте выводы

Какая была цель на урок? _____

Критерии оценивания (по 1 баллу за каждый критерий):

1. Умение формулировать цель.	
2. Самостоятельность выполнения.	
3. Владение теоретическим материалом	
4. Грамотность выполнения.	
5. Выполнение всех заданий	
Ваша самооценка:	