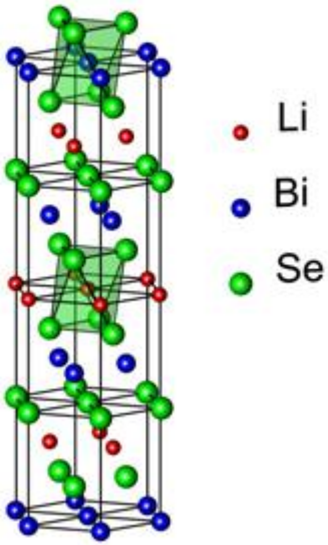
Модели
и моделирование

Модели и их типы

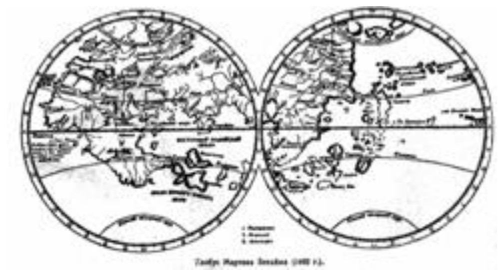
Модели в нашей жизни

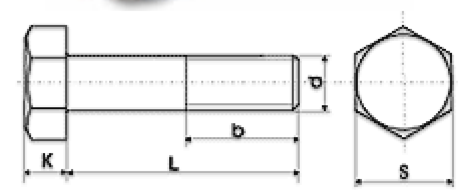


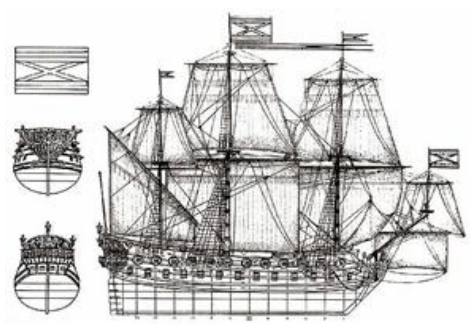
Что такое модель?

Модель – это объект, который обладает некоторыми свойствами другого объекта (*оригинала*) и используется вместо него.

Оригиналы и модели







Первый линейный русский корабль «Гото Предестинация»

Что можно моделировать?

Модели объектов:

- уменьшенные копии зданий, кораблей, самолетов, …
- модели ядра атома, кристаллических решеток
- чертежи
- …

Модели процессов:

- изменение экологической обстановки
- экономические модели
- исторические модели
- …

Модели явлений:

- землетрясение
- солнечное затмение
- цунами
- …

Моделирование

Моделирование – это создание и использование моделей для изучения оригиналов.

Когда используют моделирование:

- **оригинал не существует**
  - древний Египет
  - последствия ядерной войны (Н.Н. Моисеев, 1966)
- **исследование оригинала опасно для жизни или дорого:**
  - управление ядерным реактором (Чернобыль, 1986)
  - испытание нового скафандра для космонавтов
  - разработка нового самолета или корабля
- **оригинал сложно исследовать непосредственно:**
  - Солнечная система, галактика (большие размеры)
  - атом, нейтрон (маленькие размеры)
  - процессы в двигателе внутреннего сгорания (очень быстрые)
  - геологические явления (очень медленные)
- **интересуют только некоторые свойства оригинала**
  - проверка краски для фюзеляжа самолета

Цели моделирования

- **исследование оригинала**

  изучение сущности объекта или явления

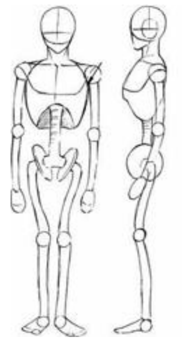
  «Наука есть удовлетворение собственного любопытства за казенный счет» (Л.А. Арцимович)
- **анализ («что будет, если …»)**

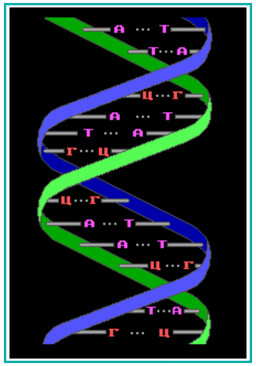
  научиться прогнозировать последствия различных воздействиях на оригинал
- **синтез («как сделать, чтобы …»)**

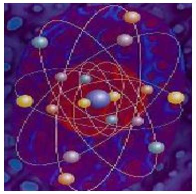
  научиться управлять оригиналом, оказывая на него воздействия
- **оптимизация («как сделать лучше»)**

  выбор наилучшего решения в заданных условиях

Один оригинал – одна модель?





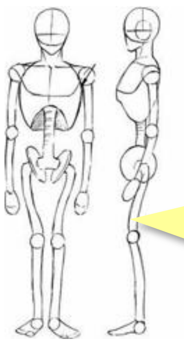


- материальная точка

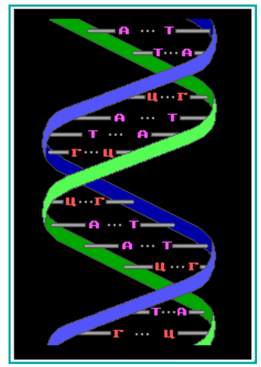
! **Оригиналу может соответствовать несколько разных моделей и наоборот!**

Зачем нужно много моделей?

! Тип модели определяется целями моделирования!



изучение строения тела



изучение наследственности

учет граждан страны

примерка одежды

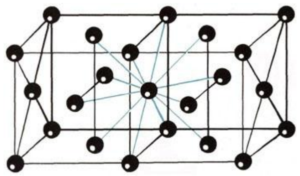
тренировка спасателей

Природа моделей

- **материальные (физические, предметные) модели:**



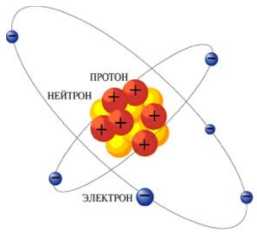


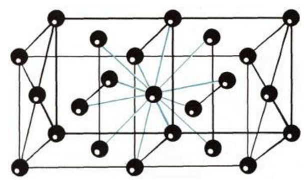
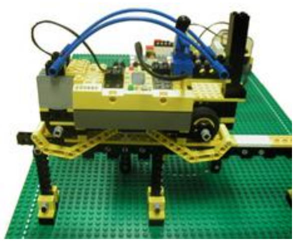


- **информационные модели** представляют собой информацию о свойствах и состоянии объекта, процесса, явления, и его взаимосвязи с внешним миром:
  - **вербальные** – словесные или мысленные
  - **знаковые** – выраженные с помощью формального языка
    - **графические** (рисунки, схемы, карты, …)
    - **табличные**
    - **математические** (формулы)
    - **логические** (различные варианты выбора действий на основе анализа условий)
    - **специальные** (ноты, химические формулы)

Модели по области применения

- **учебные** (в т.ч. тренажеры)



- **опытные** – при создании новых технических средств

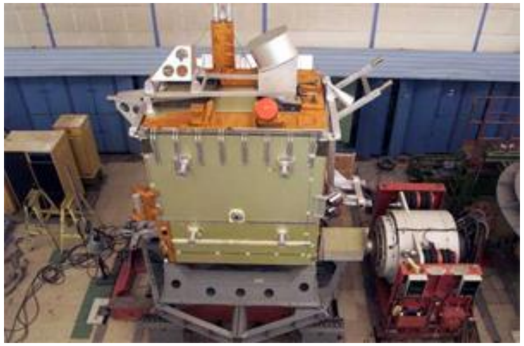

аэродинамическая труба

испытания в опытовом бассейне

- **научно-технические**

имитатор солнечного излучения

вакуумная камера в Институте космических исследований



вибростенд НПО «Энергия»

Модели по фактору времени

- **статические** – описывают оригинал в заданный момент времени
  - силы, действующие на тело в состоянии покоя
  - результаты осмотра врача
  - фотография
- **динамические**
  - модель движения тела
  - явления природы (молния, землетрясение, цунами)
  - история болезни
  - видеозапись события

Модели по характеру связей

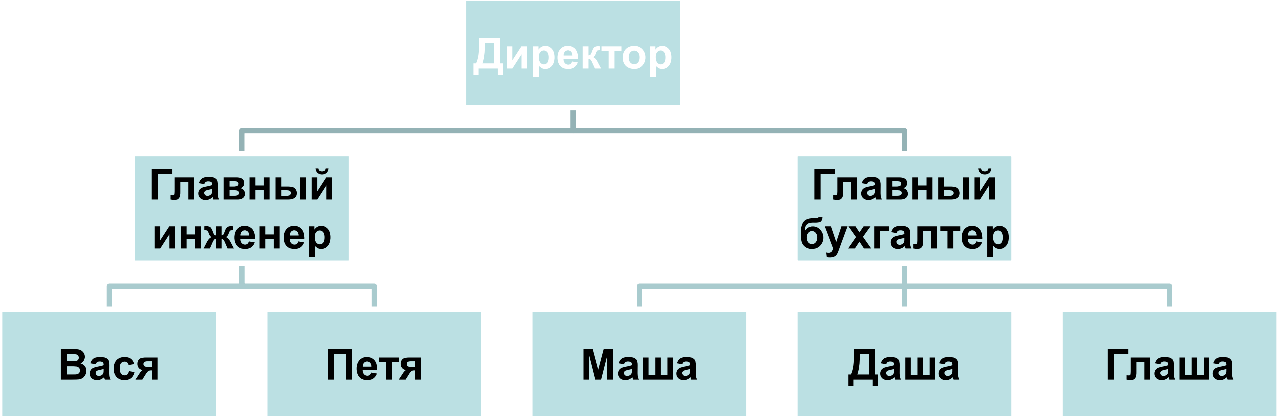
- **детерминированные**
  - связи между входными и выходными величинами жестко заданы
  - при одинаковых входных данных каждый раз получаются одинаковые результаты

  Примеры
    - движение тела без учета ветра
    - расчеты по известным формулам
- **вероятностные (стохастические)**
  - учитывают случайность событий в реальном мире
  - при одинаковых входных данных каждый раз получаются немного разные результаты

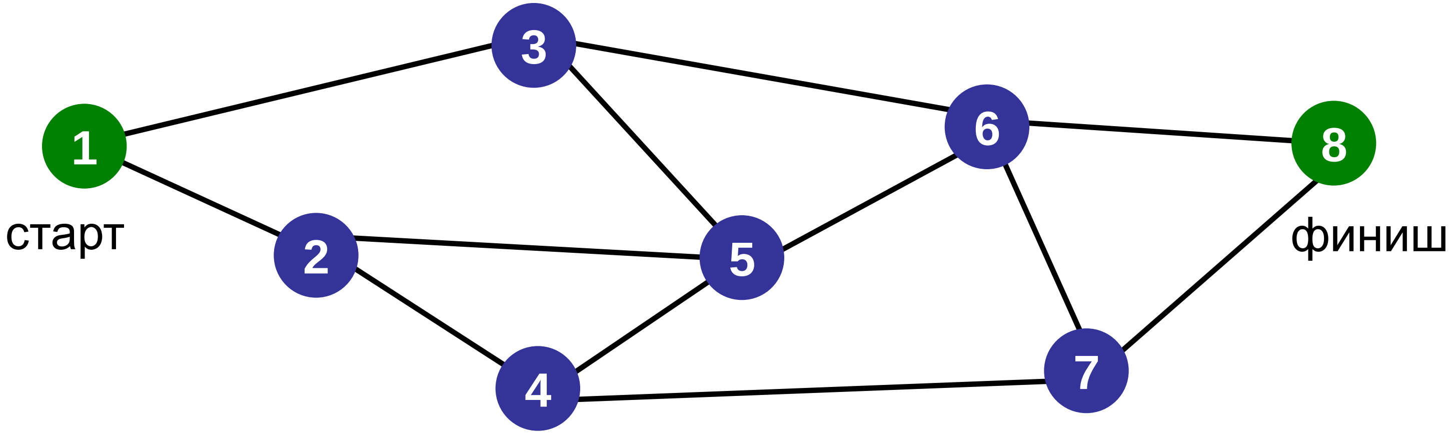
  Примеры
    - движение тела с учетом ветра
    - броуновское движение частиц
    - модель движения судна на волнении
    - модели поведения человека

Модели по структуре

- табличные модели (пары соответствия)
- иерархические (многоуровневые) модели



- сетевые модели (графы)



Специальные виды моделей

- **имитационные**
  - нельзя заранее вычислить или предсказать поведение системы, но можно имитировать её реакцию на внешние воздействия;
  - максимальный учет всех факторов;
  - только численные результаты;

! Задача – найти лучшее решение **методом проб и ошибок** (многократные эксперименты)!

Примеры:

- испытания лекарств на мышах, обезьянах, …
- математическое моделирование биологических систем
- модели бизнеса и управления
- модели процесса обучения

Специальные виды моделей

- **игровые** – учитывающие действия противника

Примеры:

- модели экономических ситуаций
- модели военных действий
- спортивные игры
- тренинги персонала

Задача – найти **лучший вариант действий в самом худшем случае!**

Адекватность модели

Адекватность – совпадение существенных свойств модели и оригинала:

- результаты моделирования согласуются с выводами **теории** (законы сохранения и т.п.)
- … подтверждаются **экспериментом**

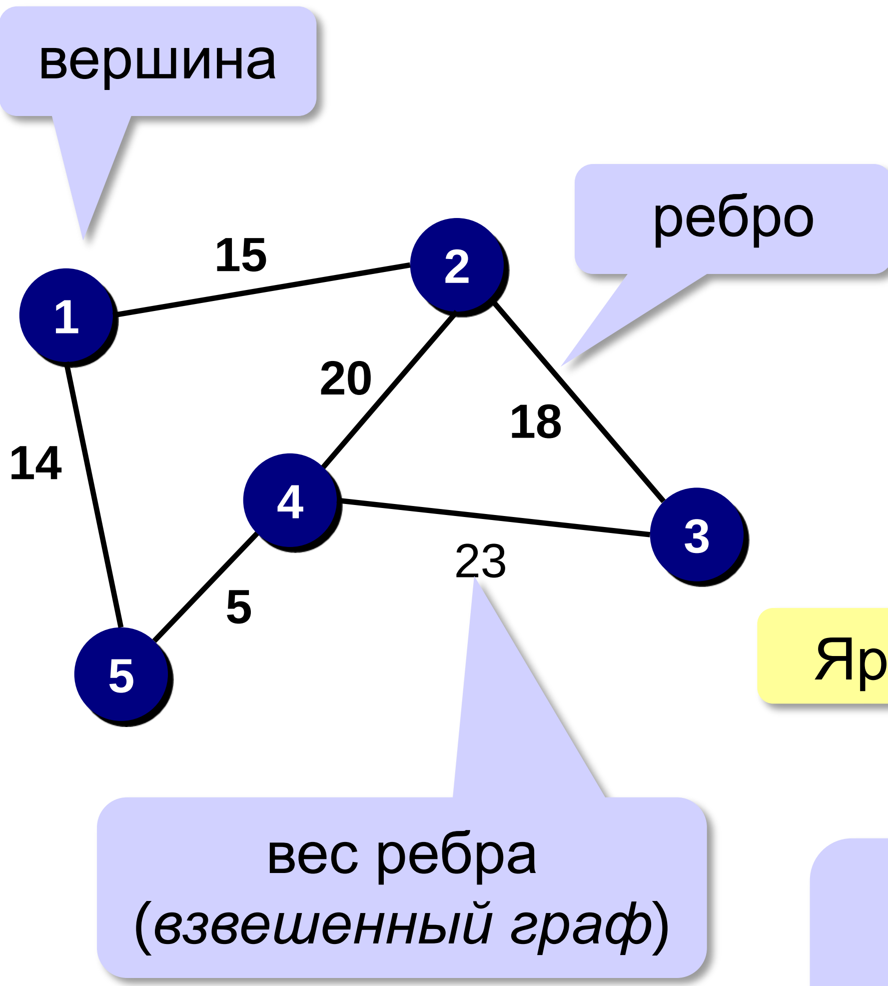
Адекватность модели можно доказать только **экспериментом!**

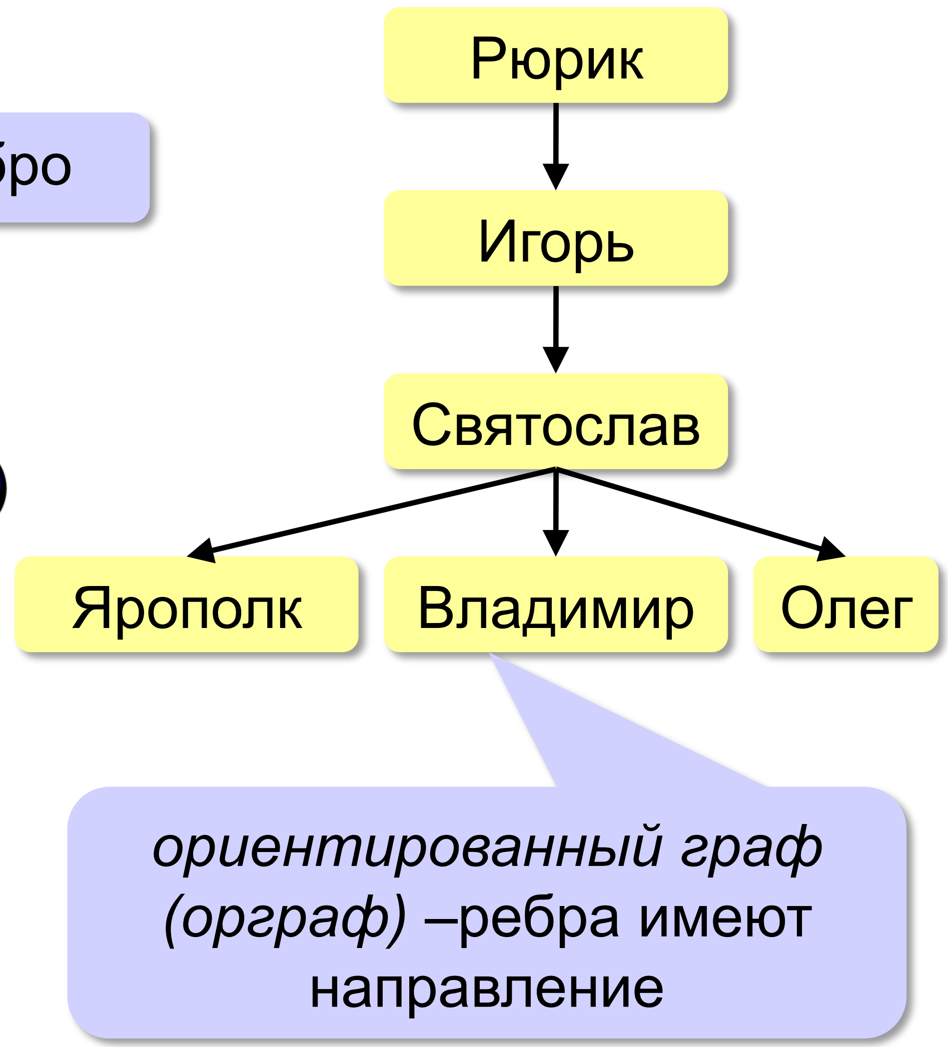
Модель всегда отличается от оригинала

Любая модель адекватна только при определенных условиях!

Системный подход

Граф – это набор вершин и соединяющих их ребер.

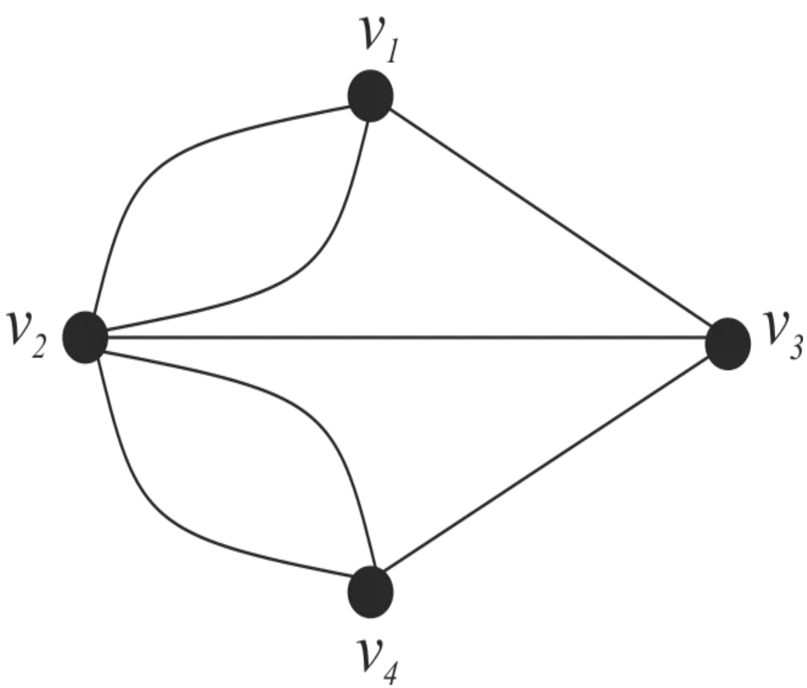




Родоначальником теории графов принято считать математика Леонарда Эйлера(1707-1783). Он предложил изящное решение знаменитой задачи о 7 Кенигсбергских мостах в 1736 году, а также придумал общий метод решения подобных задач.

по легенде один из жителей Кенигсберга спросил у своего товарища, сможет ли он пройти во всем мостам, связывающим островки на реке Преголь и вернуться в ту же самую точку, побывав на каждом мосту ровно один раз ?

Решить на практике эту задачу никто из жителей не смог. Покорилась она лишь Эйлеру, в то время работавшему в Петербурге. Легендарный математик не только расставил все точки над i, но и разработал общий принцип решения таких задач.



Эйлер схематически изобразил структуру, которую образуют мосты и назвал её "**графом"**. Точки на нём он назвал **"вершинами"**, а соединяющие их линии - **"ребрами"**.

Ключевая догадка Эйлера состояла в том, чтобы подсчитать, **сколько ребер выходит из каждой вершины**. На нашем рисунке:

•из 1-ой - выходит три ребра;

•из 2-ой - пять ребер;

•из 3-ой - три ребра;

•из 4-ой - три ребра.

Все четыре вершины графа оказались "нечетными".

Немного поэкспериментировав, Эйлер вывел четыре основных правила для решения таких задач:

1. Число нечетных вершин графа всегда чётно. Невозможно начертить граф, который имел бы нечетное число нечетных вершин. (можете попробовать на досуге).

2. Если у графа все вершины четные, то его можно начертить одним росчерком пера, причем неважно, где начинать.

3. Если у графа две нечетные вершины, то его можно начертить одним росчерком пера, но начинать надо в одной из нечетных вершин, а закончить в другой.

4. Граф с более чем двумя нечетными вершинами построить одним росчерком пера невозможно.

Вы уже догадались, что задача о мостах Кёнигсберга решений не имеет, ведь в ней целых четыре нечетных вершины!

Одной из разновидностей графа является дерево.

Дерево — это совокупность элементов (вершин), в которой выделен один элемент (корень), а остальные элементы разбиты на непересекающиеся множества (поддеревья). Каждое поддерево является деревом, а его корень является потомком корня дерева, т. е. все элементы связаны между собой отношением «предок — потомок». В результате образуется иерархическая структура вершин. Частным случаем дерева является бинарное дерево, в котором каждая вершина может иметь не более двух потомков.
Деревья используются для представления родственных связей (генеалогическое дерево), для определения выигрышной стратегии в играх и т. д.

Ещё одной знакомой вам структурой данных являются таблицы, состоящие из строк и граф (столбцов, колонок), пересечение которых образуют ячейки. Таблицы применяют для наглядности и удобства сравнения показателей.

Пример 1 Построим таблицу, соответствующую неориентированному графу (рис. 3.5), отражающему схему дорог между некоторыми населёнными пунктами.

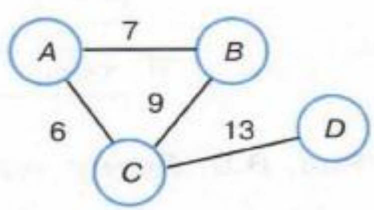


Рис. 3.5. Граф схемы дорог

Строки и столбцы таблицы будут соответствовать вершинам графа. Если две вершины являются смежными (соединены ребром), то в ячейку на пересечении соответствующих столбца и строки будем записывать вес этого ребра. В противном
случае (вершины не являются смежными) в ячейку будем записывать 0. Получится
таблица типа «объект — объект».
Такую таблицу называют матрицей смежности. Часто в матрицах смежности вместо нуля ставят знак минус, что обеспечивает большую наглядность.

	A	*B*	*C*	*D*
A	0	7	6	0
B	7	0	9	0
C	6	9	0	13
D	0	0	13	0

	A	*B*	*C*	*D*
A	–	7	6	–
B	7	–	9	–
C	6	9	–	13
D	–	–	13	–

Матрица смежности неориентированного графа симметрична относительно главной диагонали, идущей от левого верхнего угла к правому нижнему углу. У матрицы смежности ориентированного графа такая симметрия отсутствует.

Пример 2

Найдём кратчайший путь от вершины A до вершины F в графе, приведённом на рисунке

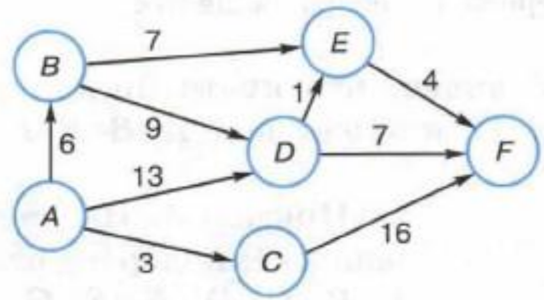


Рис. 3.7. Ориентированный граф

Составим матрицу смежности, соответствующую данному ориентированному графу:

	A	B	C	D	E	F
A	–	6	3	13	–	–
B	–	–	–	9	7	–
C	–	–	–	–	–	16
D	–	–	–	–	1	7
E	–	–	–	–	–	4
F	–	–	–	–	–	–

По матрице смежности построим полное дерево перебора решений

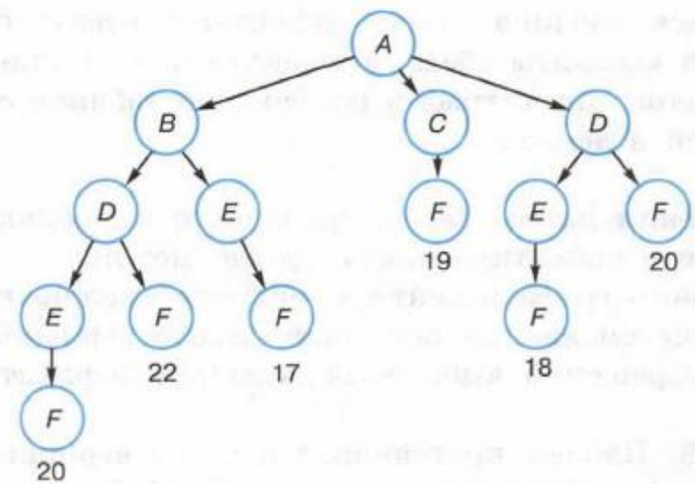
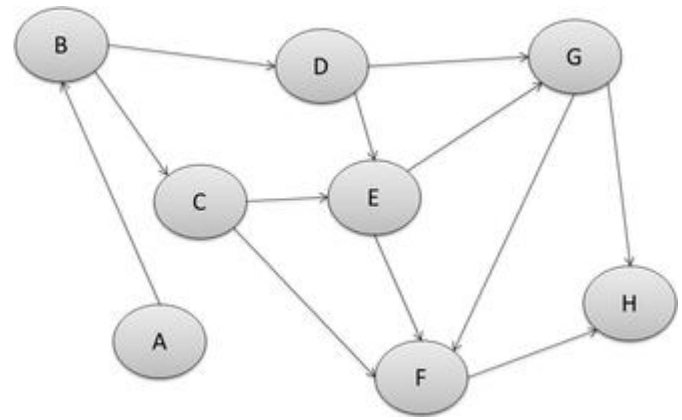


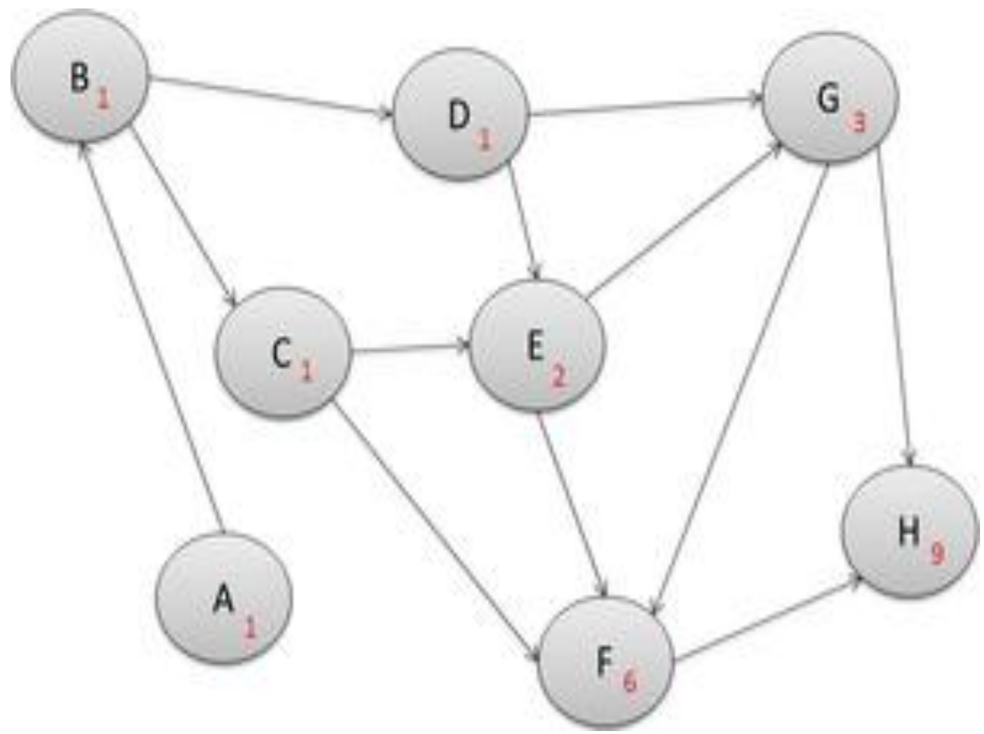
Рис. 3.8. Полное дерево перебора решений

На рисунке 3.8 видно, что кратчайший путь из вершины A в вершину F равен 17 и имеет вид A-B-E-F.

Пример 3 Сколько существует различных маршрутов от А до Н?

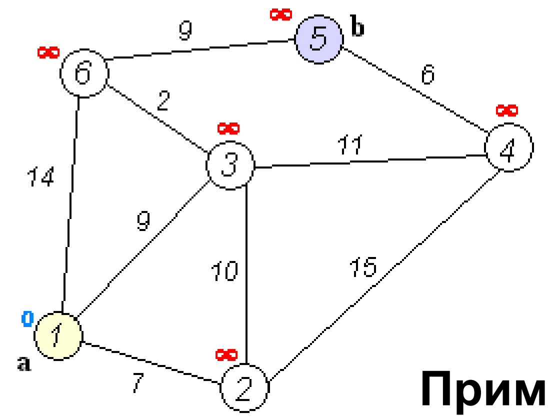


K(X) – количество маршрутов от начала до X.
K(A)=1
K(B)=K(A)=1
K(C)=K(B)=1
K(D)=K(B)=1
K(E)=K(C)+K(D)=1+1=2
K(G)=K(D)+K(E)=1+2=3
K(F)=K(C)+K(E)+K(G)=1+2+3=6
K(H)=K(G)+K(F)=3+6=9



Ответ: 9

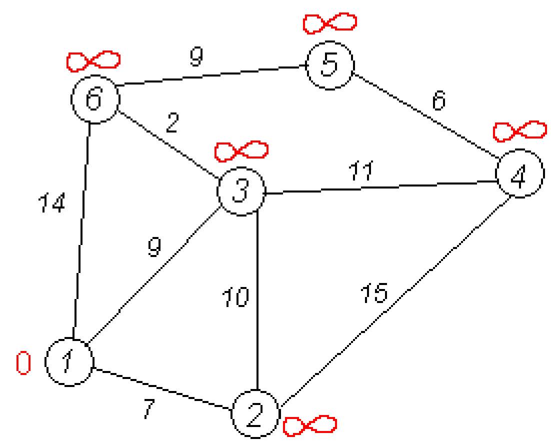
Алгори́тм Де́йкстры (англ. *Dijkstra's algorithm*) — алгоритм на графах, изобретённый нидерландским учёным Эдсгером Дейкстрой в 1959 году. Находит кратчайшие пути от одной из вершин графа до всех остальных. Алгоритм работает только для графов без рёбер отрицательного веса. Алгоритм широко применяется в программировании



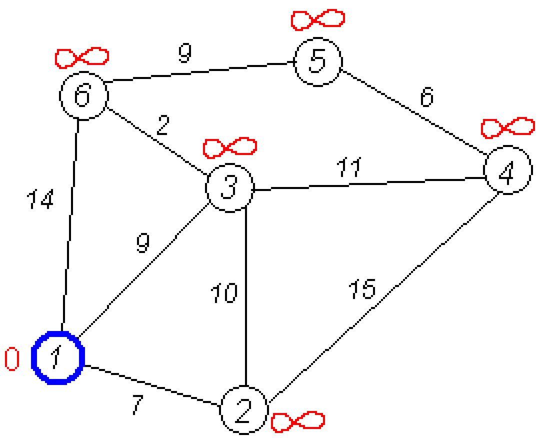
Пример 4

Кружками обозначены вершины, линиями — пути между ними (рёбра графа).
В кружках обозначены номера вершин, над рёбрами обозначен их вес — длина пути.
Рядом с каждой вершиной красным обозначена метка — длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины 1.

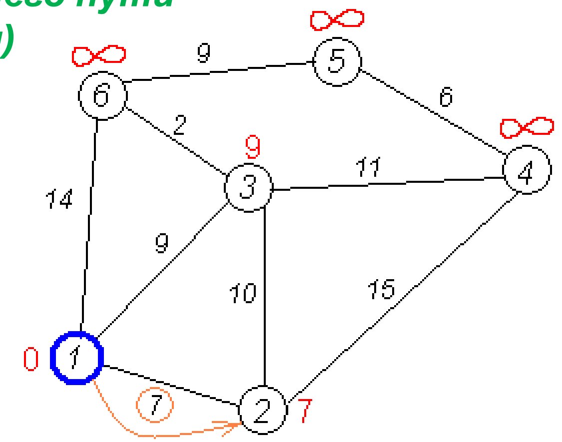
Рассмотрим выполнение алгоритма на примере графа, показанного на рисунке. Пусть требуется найти кратчайшие расстояния от 1-й вершины до всех остальных.



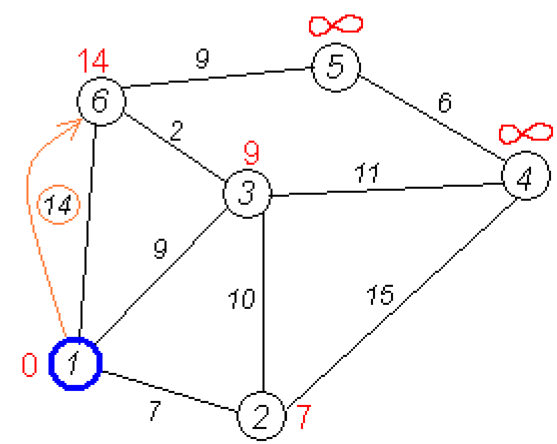
Первый шаг.
Минимальную метку имеет вершина 1.
Её соседями являются вершины 2, 3 и 6.



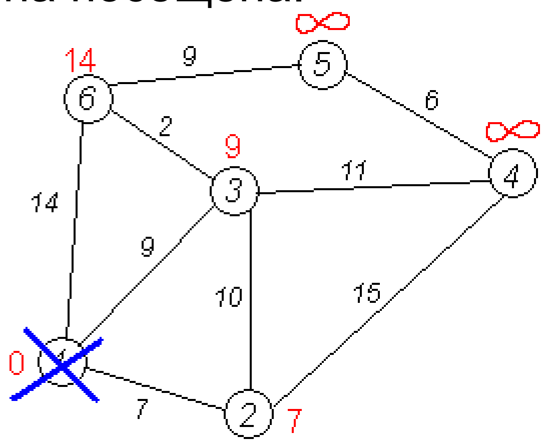
Первый по очереди сосед вершины 1 — вершина 2, потому что длина пути до неё минимальна.
Длина пути в неё через вершину 1 равна сумме значения метки вершины 1 и длины ребра, идущего из 1-й в 2-ю, то есть 0 + 7 = 7.
Это меньше текущей метки вершины 2, бесконечности, поэтому новая метка 2-й вершины равна 7.



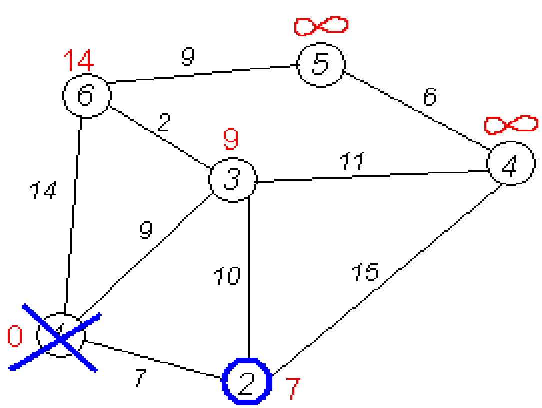
Аналогичную операцию проделываем с двумя другими соседями 1-й вершины — 3-й и 6-й.



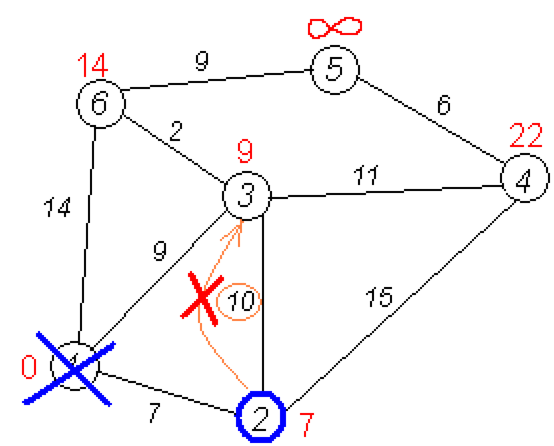
Все соседи вершины 1 проверены. Текущее минимальное расстояние до вершины 1 считается окончательным и пересмотру не подлежит. Вычеркнем её из графа, чтобы отметить, что эта вершина посещена.



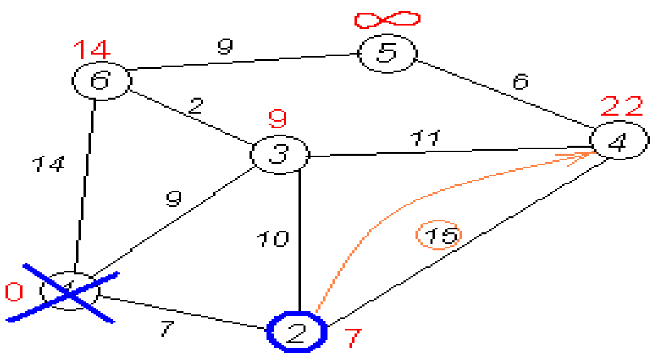
Второй шаг.
Снова находим «ближайшую» из непосещённых вершин. Это вершина 2 с меткой 7.



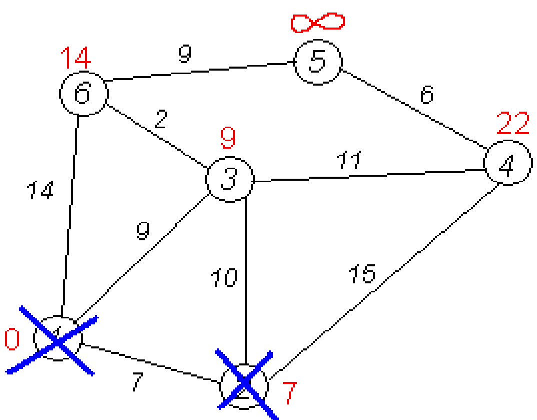
Снова пытаемся уменьшить метки соседей выбранной вершины, пытаясь пройти в них через 2-ю вершину. Соседями вершины 2 являются вершины 1, 3 и 4.
Первый (по порядку) сосед вершины 2 — вершина 1. Но она уже посещена, поэтому с 1-й вершиной ничего не делаем.
Следующий сосед — вершина 3, так как имеет минимальную метку.
Если идти в неё через 2, то длина такого пути будет равна 17 (7 + 10 = 17). Но текущая метка третьей вершины равна 9, а это меньше 17, поэтому метка не меняется.



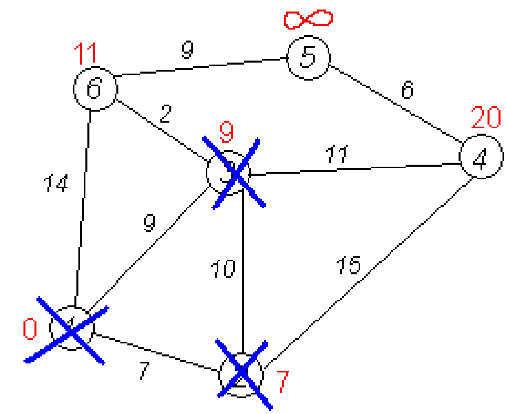
Ещё один сосед вершины 2 — вершина 4. Если идти в неё через 2-ю, то длина такого пути будет равна сумме кратчайшего расстояния до 2-й вершины и расстояния между вершинами 2 и 4, то есть 22 (7 + 15 = 22).
Поскольку 22< ∞, устанавливаем метку вершины 4 равной 22.



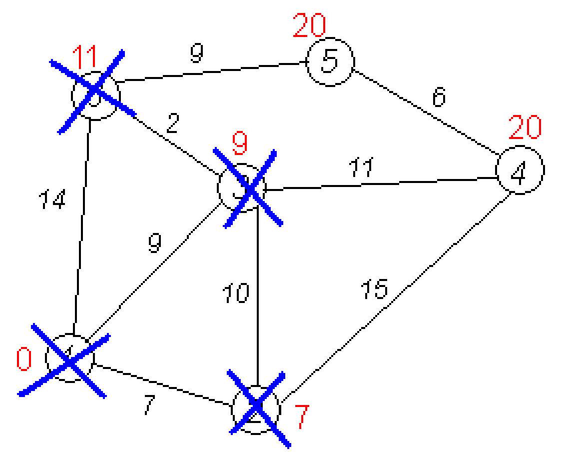
Все соседи вершины 2 просмотрены, замораживаем расстояние до неё и помечаем её как посещённую.

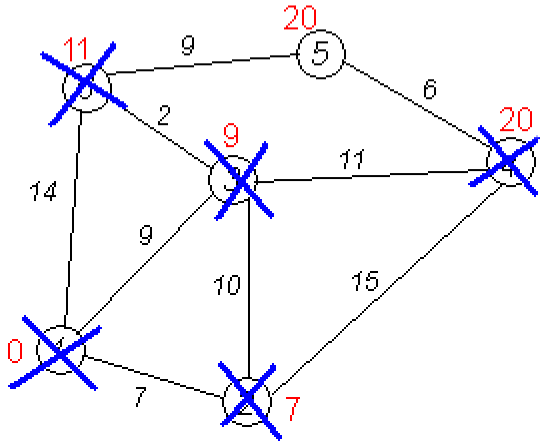


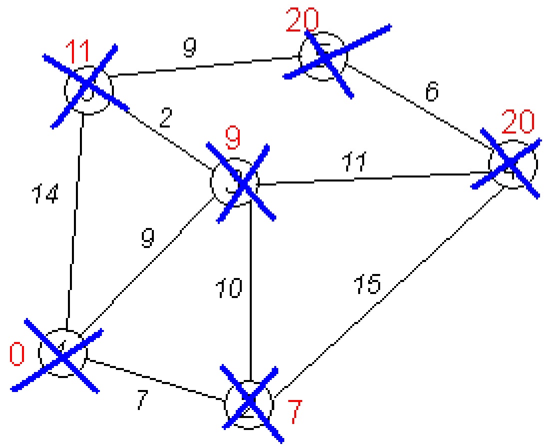
Третий шаг.
Повторяем шаг алгоритма, выбрав вершину 3. После её «обработки» получим такие результаты:



Дальнейшие шаги.
Повторяем шаг алгоритма для оставшихся вершин. Это будут вершины 6, 4 и 5, соответственно порядку.







Завершение выполнения алгоритма.

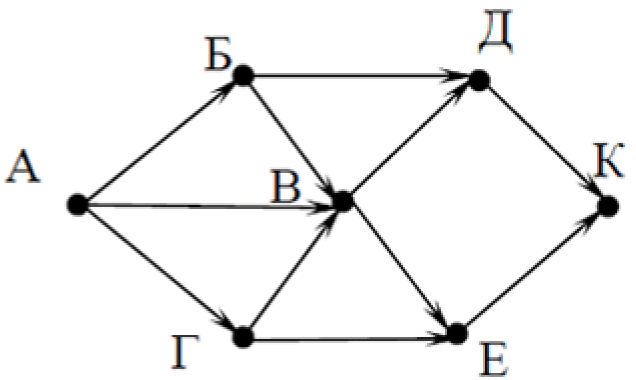
Алгоритм заканчивает работу, когда все вершины посещены.

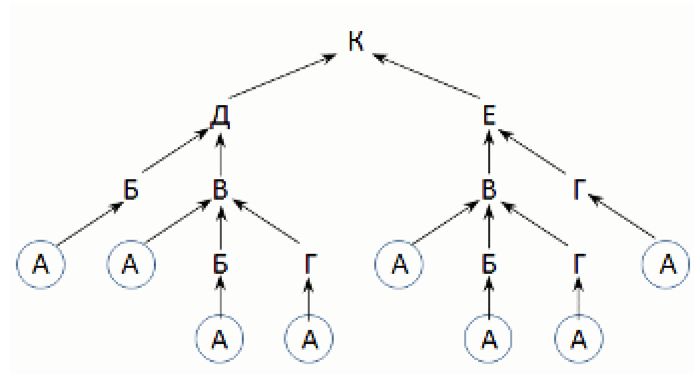
Результат работы алгоритма виден на последнем рисунке: кратчайший путь от вершины 1 до 2-й составляет 7, до 3-й — 9, до 4-й — 20, до 5-й — 20, до 6-й — 11.

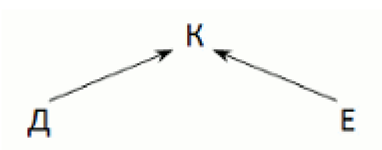
Если в какой-то момент все непосещённые вершины помечены бесконечностью, то это значит, что до этих вершин нельзя добраться (то есть граф несвязный). Тогда алгоритм может быть завершён досрочно.

Пример 5 Количество путей

Сколько существует различных путей из А в К?







Графический способ. Начнем с конца. В точку **К** можно попасть двумя способами: из точки **Д** и из точки **Е**.

В точку **Д** можно попасть из точек **Б** и **В**. А в точку **Е** из точек **В** и **Г** и т.д. Ход рассуждения отображен на схематичном рисунке.

Из рисунка видно, что у нас получилось различных 8 путей от начального пункта **А** до конечного пункта **К**.
Ответ: 8

Этапы моделирования

I. Постановка задачи

- **исследование оригинала**

  изучение сущности объекта или явления
- **анализ («что будет, если …»)**

  научиться прогнозировать последствий при различных воздействиях на оригинал
- **синтез («как сделать, чтобы …»)**

  научиться управлять оригиналом, оказывая на него воздействия
- **оптимизация («как сделать лучше»)**

  выбор наилучшего решения в заданных условиях

! **Ошибки при постановке задачи приводят к наиболее тяжелым последствиям!**

I. Постановка задачи

Хорошо поставленная задача:

- описаны все связи между исходными данными и результатом
- известны все исходные данные
- решение существует
- задача имеет единственное решение

Примеры плохо поставленных задач:

- Винни Пух и Пятачок построили ловушку для слонопотама. Удастся ли его поймать?
- Малыш и Карлсон решили по–братски разделить два орешка – большой и маленький. Как это сделать?
- Найти максимальное значение функции $y = x^2$ (нет решений).
- Найти функцию, которая проходит через точки (0,1) и (1,0) (неединственное решение).

II. Разработка модели

- **выбрать тип модели**
- **определить *существенные* свойства оригинала,** которые нужно включить в модель, отбросить несущественные (для данной задачи)
- **построить формальную модель** это модель, записанная на *формальном языке* (математика, логика, …) и отражающая только существенные свойства оригинала
- **разработать алгоритм работы модели** **алгоритм** – это четко определенный порядок действий, которые нужно выполнить для решения задачи

III. Тестирование модели

Тестирование – это проверка модели на простых исходных данных с известным результатом.

Примеры:

- устройство для сложения многозначных чисел – проверка на однозначных числах
- модель движения корабля – если руль стоит ровно, курс не должен меняться; если руль повернуть влево, корабль должен идти вправо
- модель накопления денег в банке – при ставке 0% сумма не должна изменяться

Модель прошла тестирование. Гарантирует ли это ее правильность?

IV. Эксперимент с моделью

Эксперимент – это исследование модели в интересующих нас условиях.

Примеры:

- устройство для сложения чисел – работа с многозначными числами
- модель движения корабля – исследование в условиях морского волнения
- модель накопления денег в банке – расчеты при ненулевой ставке

Можно ли 100%-но верить результатам?

V. Проверка практикой, анализ результатов

Возможные выводы:

- задача решена, модель адекватна
- необходимо изменить алгоритм или условия моделирования
- необходимо изменить модель (например, учесть дополнительные свойства)
- необходимо изменить постановку задачи

Задача. Очередь в сберкассе.

I этап. Постановка задачи.

Описание задачи

За два часа до обеденного перерыва 40 бабушек встали в очередь за пенсией. Кассирша обслуживает клиента в среднем одну минуту.

Первая бабушка задавала кассирше вопросы 9 мин. 15 с. Каждая следующая бабушка, «мотая на ус ответы», адресованные предыдущим бабушкам, спрашивала кассиршу на 10 с меньше.

Цель моделирования

Исследовать ситуацию с разных точек зрения путем формирования заданий для решения задач типа «что будет, если…», «как сделать, чтобы …». Сформулировать выводы и дать свои рекомендации.

II этап. Разработка модели

Математическая модель:

T_1=9 мин 15 с+1 мин

$T_i=T_{i-1}$-10 с

$S_i=S_{i-1}+T_i$ - суммарное время

III этап. Компьютерный эксперимент

Моделируем в среде MS Excel

	A	B	C
1	Время обслуживания 1 клиента	00:01:00	
2	Время общения (T_1)	00:09:15	
3	Уменьшение времени	00:00:10	
4	Номер бабушки	Время обслуживания одной бабушки (T_i)	Суммарное время
5	1	=B$2+B$1	=B5
6	2	=B5-B$3	=C5+B6
7			
8	40	03:45	4:40:00

IV. Эксперимент с моделью

План моделирования

1.Проверить правильность ввода формул.

2.Произвести расчеты.

3.Оформить результаты анализа модели в виде отчета в текстовом процессоре.

Технология моделирования

1.Ввести в таблицу контрольные исходные данные и скопировать расчетные формулы .

2.Продолжить копирование формул на 40 бабушек.

V этап. Анализ результатов моделирования

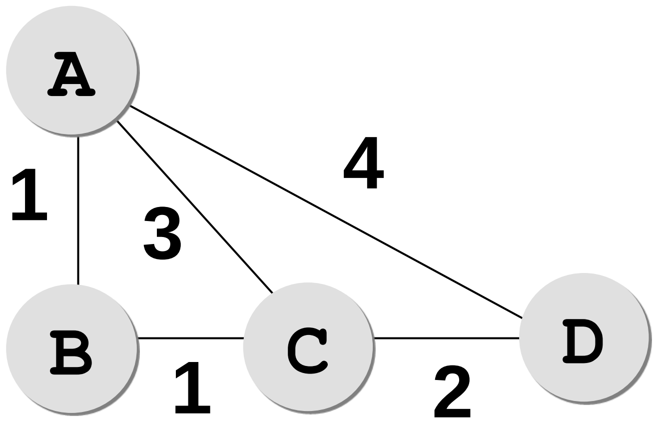
Задание

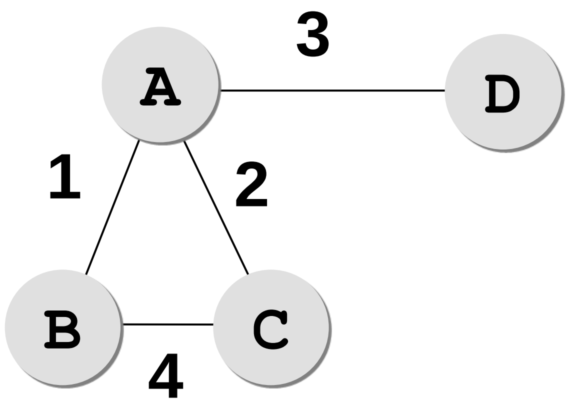
По результатам моделирования в электронных таблицах ответить на вопросы:

1. Как долго будет спрашивать кассиршу последняя бабушка?
2. Хватит ли на обслуживание всех бабушек дообеденного перерыва (2 часа)?
3. Если не хватит, то какая по счету бабушка огорчится?
4. Хватит ли оставшихся до конца рабочего дня шести часов на обслуживание всей очереди?
5. Определить по таблице, сколько времени понадобится кассирше, чтобы обслужить всю очередь.
6. Найти в таблице строку, в которой суммарное время показывает наступление перерыва.

Самостоятельная работа

1) Заполните таблицу



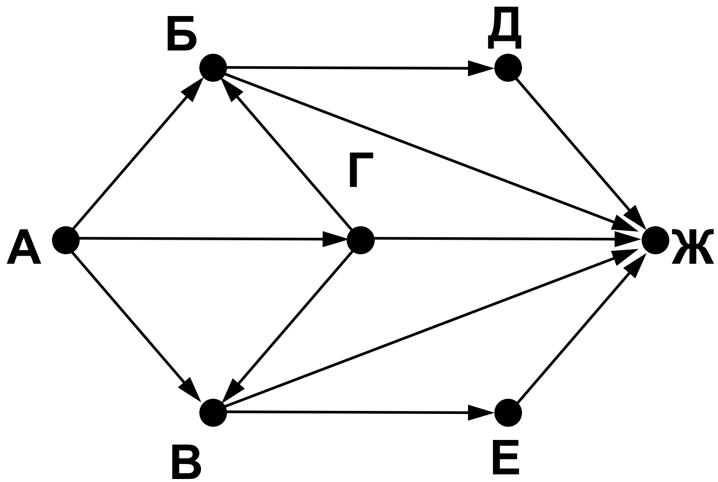


	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

2)Количество путей

Сколько существует различных путей из А в Ж?



Обозначим

К(Х) – количество маршрутов от начала до Х.

3) Кратчайший путь

	A	B	C	D	E
A		2	4		
B	2		1		7
C	4	1		3	5
D			3		3
E		7	5	3	

Определите кратчайший путь между пунктами A и E.

Нарисуйте схему
Примените алгоритм Дейкстры

Решение

Построить дерево решений

Пример 4 На рисунке 3.9 представлена схема дорог, связывающих города A, B, C, D, E, F, G.
По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько разных путей существует из города A в город G?

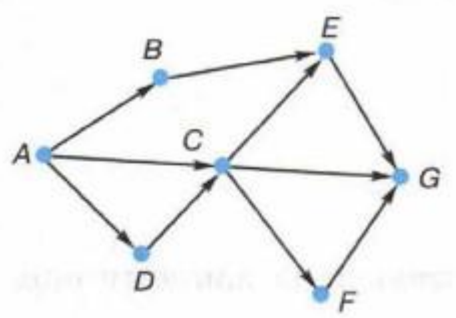


Рис. 3.9. Схема дорог

Постройте дерево и подсчитайте число дорог из города A в город G самостоятельно.

Решение

Ответ:

Спасибо за внимание